UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

BOSILJKA TADIĆ

ANALIZA KRITIČKOG PONAŠANJA MODELA KOMPRESIBILNOG FEROMAGNETA METODOM RENORMALIZACIONE GRUPE

- MAGISTARSKI RAD -

INSTITUT ZA FIZIKU
BEOGRAD - 1977. GOD.

Rad na ovoj magistarskoj tezi započet je i završen u Laboratoriji za teorijsku fiziku Instituta za fiziku u Beogradu. Deo rezultata koji su prezentirani u drugoj glavi (odeljak 4.) dobijen je u toku mog boravka u Institutu za teorijsku fiziku Eötvös Univerziteta u Budimpešti, januara 1977.

Smatram prijatnom dužnošću da se na ovom mestu zahvalim Dr Savi Miloševiću, docentu Prirodnomatematičkog fakulteta u Beogradu, za rukovodjenje ovim radom i Dr Laszlu Sasváriu, naučnom saradniku Instituta za teorijsku fiziku Eötvös Univerziteta u Budimpešti, za neposrednu saradnju na ovoj problematici. Takodje, najtoplije se zahvaljujem saradnicima Laboratorije za teorijsku fiziku Instituta za fiziku u Beogradu koji su, interesovanjem za ovaj rad, doprineli njegovoj realizaciji.

Republičkoj zajednici nauke SR Srbije dugujem zahvalnost za finansijsku podršku.

Pri pisanju ovog rada bili smo suočeni sa jednom teškoćom jezičke prirode: nismo u mogućnosti da nadjeno adekvatne prevode nekih termina koji potiču iz engleskog jezika a široko su prihvaćeni u krugu eksperata u teoriji faznih prelaza (crossover, scaling, constraint). Zbog toga ih ovde upotrebljavamo u originalnom obliku ili uz transkripciju, s nadom da će se vremenom formirati adekvatni termini u našem jeziku.

U V O D

Kompresibilnost rešetke na kojoj je situiran magnetni sistem može bitno da promeni regularni magnetni fazni prelaz drugog reda, koji bi taj sistem ispoljavao u slučaju krute rešetke. Efekat kompresibilnosti rešetke ogleda se, preko mikroskopskih mehanizama, u sprezi magnetnog sistema sa rešetkom, odnosno u pojavi dodatne dugodometne četvorospinske interakcije u efektivnom hamiltonijanu magnetnog sistema.

Problem kritičnog ponašanja sistema sa indukovanom četvorospinskom interakcijom bio je predmet zanimljivih diskusija zadnjih nekoliko godina. Brojni publikovani rezultati svojom raznorodnošću a ponekad i kontradiktornošću osvetlili su kompleksnost ovog problema i izazvali dvoumicu čak i oko vrlo kvalitativnog rezultata kao što je red faznog prelaza. Pojavom metoda Renormalizacione grupe [1-6] (u daljem tekstu RNG) dobijena je moćna tehnika koja obezbedjuje mogućnost da se ovaj problem potpunije sagleda i reši.

U analizi kritičnog ponašanja sistema kod kojih je parametar uredjenja kuplovan sa jednim elastičnim medijumom, pojavljuju se dodatni parametri, zbog osobina tog medijuma, predstavljeni odgovarajućim konstantama elastičnosti, koji takodje utiču na njegovo kritično ponašanje. Larkin i Pikin [7]

su razmatrali Landau-Ginzburg model za strukturne fazne prelaze sistema na elastičnom medijumu sa konačnim modulom sažimanja (B) i smicanja (μ) i našli da takav sistem uvek pokazuje fazni prelaz prvog reda "blizak faznom prelazu drugog reda". Koristeći ekvivalentnost modela Larkina-Pikina, sa magnetnim Ising-ovim sistemom i generališući ga na n-komponentni spinski model, Sak [8] je dobio izotropan kompresibilni model prilagodjen tretmanu pomoću metoda RNG. Primenom metoda RNG u prvom redu ε-razvoja, Sak je dobio da odgovarajući jednokomponentni model uvek pokazuje fazni prelaz prvog reda, dok n-komponentni model ima regularan fazni prelaz drugog reda, kao da je rešetka kruta. Ne ulazeći u detalje analize koja je data u ref.[7,8], naglasimo samo da je konačnost modula smicanja (μ) od bitnog značaja za promenu reda prelaza. S druge strane, jedan egzaktno rešiv, uprošćen model sa $\mu = 0$, predložen od strane Bakera i Essam-a [9], pokazuje, pri konstantnom spoljašnjem pritisku, fazni prelaz prvog reda na pozitivnim pritiscima, a prelaz drugog reda na negativnim pritiscima. Promena reda faznog prelaza dobijena je takodje i za Larkin-Pikin-Sak model (LPS) uvodjenjem konstantnog spoljašnjeg pritiska [10]. Trikritični pritisak je reda μ. Za pritiske veće od trikritičnog prelaz je drugog reda. Medjutim, u ovoj oblasti pritisaka, sistem postaje nestabilan u odnosu na deformacije smicanja, kao što su primetili Bergman i Halperin [11]. Pomenimo još dva rezultata dobijena metodom RNG, koji su od značaja za dalju diskusiju u ovom radu. Ising-model sa spoljašnjim uslovom [12] ("constrained" Ising model) pokazuje renormalizovan u Fisher-ovom smislu

[13] fazni prelaz drugog reda. Slično, BE-model sa uslovom konstantne spoljašnje sile pokazuje mogućnost promene reda prelaza (slučaj jake sprege spin-rešetka) i mogućnost renormalizovanog faznog prelaza drugog reda [14]. Ovakvi rezultati nameću činjenicu da se kompresibilnost rešetke može posmatrati kao "skriveni" parametar [13] u odnosu na magnetni sistem situiran na toj rešetki. Treba, medjutim, napomenuti da se u okviru metoda RNG ne ispituje da li jedan modelni hamiltonijan zadovoljava uslove Fisher-ove renormalizacije kritičnih eksponenata ili ne, već se odgovor daje a posteriori, nakon računanja kritičnih eksponenata. (Što se tiče pomenutih uslova, zanimljivo je pogledati dva kontradiktorna rezultata za Ising-ov model [15]).

Raznorodnost rezultata, od kojih smo samo neke pomenuli, može se dovesti u vezu sa raznorodnošću graničnih uslova kojima je sistem izložen, kao što je nedavno razjašnjeno u ref. [11]. Naime, kod kompresibilnih magnetnih sistema mogu se pojaviti dve vrste nestabilnosti. Prvo, makroskopske nestabilnosti koje stoje u vezi sa graničnim uslovima (a) konstantan spoljašnji pritisak; b) konstantna zapremina ili c) "nefizički" granični uslovi [7,8,10,16] gde zapremina sistema nije konstantna, ali je oblik primerka fiksiran). Druga vrsta nestabilnosti je nezavisna od graničnih uslova i mikroskopske je prirode (napr. slučaj konačne anizotropije rešetke [11,16]). Obe pomenute vrste nestabilnosti dovode do pojave magnetnog faznog prelaza prvog reda: makroskopske nestabilnosti - u smislu nepostizanja stabilnih fiksnih tačaka na jeziku RNG, dok

nestabilnosti izazvane anitropijom rešetke uključuju "omekšavanje" normalnih moda sistema, tako da on ne može biti stabilizovan nikakvim graničnim uslovima [11].

Spinska anizotropija može, takodje, prouzrokovati nestabilnosti, kao što je nedavno sugerirao Bender [17], na osnovu jedne opšte analize pomoću RNG u Wegner-ovom prilazu [5]. Nedavno su Murata [18] i Natterman [19], analizirali efekte kubne anizotropije na kritično ponašanje kompresibilnih magneta.

U ovom radu mi analiziramo kritično ponašanje spinski anizotropnog kompresibilnog feromagneta sa izmenskom anizotropijom. Mi razmatramo LPS - hamiltonijan [7,8] generalisan uvodjenjem anizotropne izmenske interakcije za slučaj harmonijske kubne rešetke. Prisustvo spinske anizotropije u dvospinskoj interakciji dovodi, posredstvom kuplovanja sa vibracijama rešetke, do anizotropne dugodometne četvorospinske interakcije, čiji je uticaj na kritično ponašanje sistema od posebnog interesa.

Da bi razdvojili efekte spinske anizotropije od efekata graničnih uslova, mi pretpostavljamo fiksirane granične uslove (periodični granični uslovi sa konstantnom zapreminom), koji obezbedjuju makroskopsku stabilnost sistema [11]. Takodje isključujemo anizotropiju rešetke koja dovodi do nestabilnosti [11,16]. Kuplovanje spinova sa rešetkom je, zbog osobina simetrije, kuplovanje samo sa lokalnom promenom gustine.

Rad je sistematizovan na sledeći način: Prva glava sadrži generalizaciju modela LPS iz koga je zatim dobijen efektivni spinski hamiltonijan integracijom po promenljivima

rešetke. Kao posledica anizotropije, efektivni hamiltonijan je u suštini model sa dva spinska polja. Drugi deo posvećen je nekim osnovnim postavkama metoda RNG i ε-razvoju oko dimenzije $d = 4$, $\varepsilon = 4-d$, u Wilsonovoj formulaciji [1]. Zbog nestandardnosti ovog metoda smatrali smo neophodnim da damo kratak pregled ideje i tehnike RNG u kritičnim pojavama, pošto je čitav ovaj rad prezentiran na "jeziku" RNG.

Sledeći formalizam metoda RNG, primenjen na efektivni spinski hamiltonijan, u drugoj glavi dajemo rekurentne relacije u opštem obliku, iz kojih onda možemo diskutovati a) fiksne tačke izotropnog modela, ponavljajući na taj način ranije rezultate [8] ali u drugom redu ε-razvoja, i b) generalni slučaj anizotropne interakcije koji uključuje poseban tretman u okviru metoda RNG. Medju brojnim fiksnim tačkama pod a) i b), koje sve leže u oblasti malih fiksnih vrednosti parametara analiziramo krosover efekte, računajući u njima skejling eksponente. U fiksnim tačkama od interesa računati su kritični indeksi.

Analiza modela sa dva kritična polja je opštija nego što to zahteva postavljeni zadatak. Demonstrirajući tehniku RNG na primeru modela sa dva spinska polja mi konstruišemo sve relevantne operatore koji su u neeksplicitnom obliku sadržani u polaznom hamiltonijanu sistema. Ovakva analiza predstavlja prirodan uvod u konstrukciju fizički relevantnih parametara za analizu kritičnog ponašanja kompresibilnih feromagnetika sa izmenskom anizotropijom, koje je diskutovano u trećoj glavi.

Analiza u drugoj i trećoj glavi ukazuje na postojanje krosovera u oblast niže spinske simetrije. Odgovarajuće fiksne

tačke u kojima operator spinske anizotropije postaje irelevantan [20], nadjene su u četvrtoj glavi. One odgovaraju kritičnom ponašanju sistema sa samo jednim kritičnim poljem, zbog čega se ovaj krosover naziva krosover u manje-komponentni spinski sistem. Medju ovim fiksnim tačkama još uvek postoji krosover karakterističan za izotropni kompresibilni sistem. Najstabilnija fiksna tačka je nadjena i ona opisuje renormalizovan fazni prelaz drugog reda medju odredjenim komponentama parametra uredjenja, čiji je broj manji od broja komponenti spina u originalnom modelu. Preostali broj komponenti spina ne trpi nikakav fazni prelaz.

U zaključku je dat pregled dobijenih rezultata u funkciji dvaju faktora koji bitno utiču na tip kritičnog ponašanja i krosover efekata kompresibilnog magneta sa anizotropijom: znak kritičnog indeksa specifične toplote magnetika na krutoj rešetki i jačina izmenske anizotropije.

Napomenimo još da su računi, u okviru metoda RNG, sprovedeni tako da obezbedjuju korektnost skejling eksponena i kritičnih indeksa u drugom redu ε-razvoja.

U tabelama na kraju rada dati su neki rezultati koji bi mogli biti od opšteg interesa za istraživače u ovoj oblasti. U apensiksima A-1) i A-2) objašnjeni su neki matematički detalji koji, zbog svoje specifičnosti, nisu mogli ući u sam tekst.

I GLAVA: MODEL I METOD

1. Model i efektivni spinski hamiltonijan

Polazimo od LPS [7,8] modela za klasičan magnetni sistem situiran na kubnoj kompresibilnoj rešetki (izotropnost rešetke, kao u referencama navedenim u Uvodu, mi nećemo odmah pretpostaviti) i generališemo ovaj model uvodjenjem spinske anizotropije. Samisao ove generalizacije sastoji se u uvodjenju dodatne interakcije izmene koja, izražena preko komponenti spinskih promenljivih, implicira zavisnost integrala izmene od pravaca u magnetnoj rešetki.

1.1. Spinska anizotropija

Izmenska interakcija prepisana preko spinskih varijabli $S_{x,i}$ odražava simetriju kristalnog polja posredstvom kuplovanja spinskog i orbitalnog kretanja elektrona, što takodje predstavlja i ključ mikroskopskih mehanizama koji dovode do spinske anizotropije [21]; orbitalno stanje elektrona je primarno odredjeno kristalnim poljem i kroz spin-orbit interakciju spin "vidi" rešetku. Energije koje potiču iz ovog mehanizma mogu zavisiti od spinskih stanja jednog jona (jednojonska anizotropija) ili, pak, predstavljaju anizotropnu izmenu. U slučaju

kubne simetrije, najniži članovi odgovorni za jednojonsku anizotropiju su četvrtog reda po komponentama spina [21]

$$\mathcal{H}_C \sim \sum_{x,i} (S_x^i)^4 , \quad S > 2 \tag{1.1}$$

Što se tiče anizotropne izmenske interakcije, ona rezultira iz vrlo složenog mehanizma jednojonske spin-orbit interakcije i spin-orbit interakcije elektrona sa dva jona. Detaljna teorijska ispitivanja čak i za neke prostije konfiguracije predstavljaju problem za sebe [21], medjutim moguće je klasifikovati hamiltonijane koji su odgovorni za neke tipove spinske anizotropije [22]. Forma hamiltonijana može da bude vrlo generalna ako se izmenski integral tretira kao empirijski parametar. Shvaćen kao efektivni hamiltonijan u tom smislu on može uključiti i neke druge mikroskopske mehanizme interakcije koji se mogu izraziti preko komponenti spina. Generalno, poreklo anizotropne izmenske interakcije može da se shvati iz predstave da oblik elektronskog oblaka zavisi od pravca spina preko spin--orbit interakcije. U slučaju kubne simetrije, član odgovoran za anizotropnu izmenu sadržan je u pseudodipolnoj interakciji [23]

$$\mathcal{H}_{aniso.} = \sum_{x,x'} p(x,x') \sum_i S_x^i S_{x'}^i (\hat{r}_{xx'}^i)^2 \tag{1.2}$$

gde je $\hat{r}_{xx'}$ ort pravca koji spaja čvorove x i x' rešetke, a p(x,x') - fenomenološki parametar. U ovom slučaju se ne pojavljuje anizotropija g-tenzora [24], čime je isključena mogućnost pojave kako izotropne, tako i anizotropne interakcije višeg reda, koja bi rezultirala samo iz ovog mehanizma.

Uključujući i anizotropnu dvospinsku interakciju tipa (1.2), koja generalno ne može biti shvaćena kao mala perturbacija na izotropnu interakciju [21], ukupna dvospinska interakcija postaje

$$TSI = \sum_{x,x'} \sum_{i} J(x,x')(1+\Delta^{i}) S_{x}^{i} S_{x'}^{i} \qquad (1.3)$$

gde je Δ^{i} fenomenološki parametar koji meri otstupanje integrala izmene u i-tom pravcu u rešetki, od njegove izotropne vrednosti $J(x,x')$. Drugim rečima, parametar Δ meri veličinu spinske anizotropije.

1.2. Kompresibilnost rešetke. Hamiltonijan sistema

Mikroskopski mehanizmi preko kojih spin "vidi" rešetku dovešće do neke vrste kuplovanja vibracija rešetke i izmenske interakcije. Fenomenološki, integral izmene u (1.3) zavisiće od relativne promene položaja čvorova rešetke. Razvojem po malim pomeranjima dobija se već u prvom redu član koji opisuje interakciju spinskog sistema sa rešetkom. Za naše namere (kritično ponašanje sistema) najzanimljivija je interakcija sa dugotalasnim oscilacijama rešetke, zbog čega rešetku možemo shvatiti kao elastični medijum, sa energijom $\mathcal{H}_L$

$$\mathcal{H}_L = \frac{1}{2}\int d^d x \left(C_{11} \sum_{\alpha} e_{\alpha\alpha}^2 + C_{12} \sum_{\alpha \neq \beta} e_{\alpha\alpha} e_{\beta\beta} + \frac{1}{2} C_{44} \sum_{\alpha \neq \beta} e_{\alpha\beta}^2 \right) \qquad (1.4)$$

gde je $e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$ tenzor deformacije, C_{11}, C_{12} i C_{44} konstante elastičnosti, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots d$, d - dimenzionalnost

rešetke. Zanemarujući detalje rešetke, na adekvatan način, suma u (1.3) prelazi u integral

$$\mathcal{H}_S = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}\sum_i J^i (S_i(x))^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha}\left(\frac{\partial S_i(x)}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \sum_{i,j} u_{o,ij}(S_i(x))^2 (S_j(x))^2 \right\} \qquad (1.5)$$

pri čemu spinska promenljiva postaje $\vec{S}(x)$ (spinska gustina), za koju se još dozvoljava $|\vec{S}(x)| < +\infty$ (tzv. aproksimacija kontinualnih spinova), što je takodje uradjeno u izotropnom modelu LPS [8]. Prisustvo dodatna dva člana u (1.5) je posledica upravo navedene aproksimacije kontinualnih spinova i neophodno je iz razloga očuvanja statističke sume originalnog modela [25,1]. Ovo je uobičajen postupak u Wilson-ovom prilazu RNG, kojim se dobija "model polja". Tako je $\vec{S}(x)$ u (1.5) ustvari n-komponentno spinsko polje.

Zavisnost integrala izmene od deformacija rešetke očituje se u pojavi interakcionog člana u hamiltonijanu, koji opisuje kuplovanje spinova sa rešetkom. S obzirom na simetrije sistema, interakcioni član je oblika

$$\mathcal{H}_{int.} = \sum_{i;\alpha,\beta} g^i \delta_{\alpha\beta} \int d^d x (S^i(x))^2 \, e_{\alpha\beta}(x) \qquad (1.6)$$

gde je g^i parametar koji meri jačinu sprege izmedju spinskog sistema i deformacija rešetke.

Ukupan hamiltonijan sistema dat je zbirom

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{int.} \qquad (1.7)$$

gde su $\mathcal{H}_L$ i $\mathcal{H}_{int.}$ dati sa (1.4) i (1.6) a $\mathcal{H}_S$ sa (1.5) u kome treba staviti nulti član u razvoju J^i, tj. J_o^i koji ne zavisi od deformacija rešetke.

1.3. Efektivni spinski hamiltonijan

Na sistem opisan hamiltonijanom (1.7) primenjujemo periodične granične uslove sa fiksiranom zapreminom da bi obezbedili njegovu makroskopsku stabilnost, kao što je naglašeno u Uvodu. Drugim rečima, zahtevamo da se zapremina ne menja pri deformaciji, dok je srednja vrednost deformacije $\langle e_{\alpha\beta}(x)\rangle$ jednaka nuli [11], što je obezbedjeno sa

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\Omega}\sum_{\vec{k}\neq 0} u_{\alpha\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1.8}$$

i

$$S^i(x) = \int_{\vec{q}} \sigma^i_{\vec{q}}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tag{1.9}$$

gde je Ω - zapremina sistema, a $\int_q \equiv \int_{|\vec{q}|<1} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$.

Unošenjem (1.8) i (1.9) u (1.7) dobijamo posle jednostavnih transformacija

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S + \frac{1}{2\Omega}\sum_{\alpha,\beta;\vec{k}\neq 0} A_{\alpha\beta}(\vec{k})u_{\alpha\vec{k}}u_{\beta,-\vec{k}} + \frac{2}{\Omega}\sum_{\alpha,i;\vec{k}\neq 0} B^i_\alpha(\vec{k})u_{\alpha\vec{k}} \tag{1.10}$$

gde je $A_{\alpha\beta}(\vec{k})$ dato sledećim izrazom:

$$A_{\alpha\beta}(\vec{k}) = (C_{12}+\frac{C_{44}}{2})k_\alpha k_\beta + \left[\frac{C_{44}}{2}k^2 + (C_{11}-C_{12}-\frac{C_{44}}{2})k_\alpha{}^2\right]\delta_{\alpha\beta} \tag{1.11}$$

i $B^i_\alpha(\vec{k})$ je

$$B_\alpha^{\,i}(\vec{k}) = i \int_{\vec{q}} \sigma_{\vec{q}}^{\,i}\, \sigma_{\vec{k}-\vec{q}}^{\,i} \cdot k_\alpha \cdot g^i \, , \qquad (1.12)$$

$i = \sqrt{-1}$.

$\mathcal{H}_S$ je čisto spinski deo originalnog hamiltonijana (1.7), prepisan preko $\sigma_{\vec{q}}^{\,i}$ - varijabli iz (1.9)

$$\mathcal{H}_S = \frac{1}{2}\sum_i \int_{\vec{q}} (r^i + q^2)\sigma_{\vec{q}}^{\,i}\sigma_{-\vec{q}}^{\,i} + \sum_{i,j;\vec{k}\neq 0} u_{o,ij} \iint_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \sigma_{\vec{q}_1}^{\,i}\sigma_{\vec{k}-\vec{q}_1}^{\,i}\sigma_{\vec{q}_2}^{\,j}\sigma_{\vec{k}-\vec{q}_2}^{\,j} \qquad (1.13)$$

gde je r^i izraženo preko parametara iz originalnog hamiltonijana na sledeći način:

$$r^i = r_o - \Delta^i \qquad (1.14)$$

koristeći spinski faktor normalizacije $S_o = \left(\frac{dk_B T}{cJ^i}\right)^{1/2}$, gde su d, c, k_B dimenzionalnost, koordinacioni broj i Bolcmanova konstanta, a $r_o = d\left(\frac{T-T_C}{T_C}\right)$ je dvospinska konstanta kuplovanja izotropnog modela [1].

Razdvajanje promenljivih izvešćemo u statističkoj sumi sistema, integrirajući po promenljivima $\vec{u}_{\vec{k}}$, tako da u izrazu

$$Z = Z_{el.} \cdot \mathrm{tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_{S,eff.}} \qquad (1.15)$$

ostaje efektivno računanje traga u spinskom prostoru. Jednakost (1.15) definiše efektivni spinski hamiltonijan. Pošto je rešetka uzeta u harmonijskoj aproksimaciji, integracija se lako izvodi, pa je

$$Z = \int \prod_i d\sigma_{\vec{q}}^{\,i}\, \exp\left\{ -\beta \mathcal{H}_S + \beta \frac{1}{2\Omega} \sum_{\alpha,\beta;\vec{k}\neq 0} (A(\vec{k}))^{-1}_{\alpha\beta} \sum_{i,j} g^i g^j B_\alpha^i(\vec{k}) B_\beta^j(-\vec{k}) \right\}. \qquad (1.16)$$

Efektivni spinski hamiltonijan je, prema tome

$$\mathcal{H}_{ef.} = \mathcal{H}_S - \frac{1}{2\Omega} \sum_{\alpha\beta; i,j; \vec{k}\neq 0} \left(A(\vec{k})\right)^{-1}_{\alpha\beta} g^i g^j k_\alpha k_\beta \times \iint_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \sigma^i_{\vec{q}_1} \sigma^i_{\vec{k}-\vec{q}_1} \sigma^j_{\vec{q}_2} \sigma^j_{\vec{k}-\vec{q}_2} \tag{1.17}$$

Formula (1.17) predstavlja opšti oblik efektivnog spinskog hamiltonijana za slučaj kubne rešetke, uključujući i spinsku i rešetkinu anizotropiju. Anizotropija rešetke, merena parametrom f ($f = C_{11} - C_{12} - \frac{C_{44}}{2}$) sadržana je u izrazu $\left(A(\vec{k})\right)^{-1}_{\alpha\beta}$. Za slučaj male anizotropije rešetke, dobijamo da je

$$\sum_{\alpha,\beta} \left(A(\vec{k})\right)^{-1}_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = \frac{1 - \frac{2f}{C_{44}} \sum_\alpha \hat{k}^4_\alpha}{C_{12} + \frac{C_{44}}{2}} \tag{1.18}$$

odnosno, dodatna četvorospinska interakcija (FSI) u efektivnom hamiltonijanu je oblika:

$$FSI = \sum_{i,j} \iiint_{\vec{k}\vec{q}_1\vec{q}_2} \left[u_{0,ij} - \frac{g^i g^j}{2\left(C_{12} + \frac{C_{44}}{2}\right)} \left(1 - \frac{2f}{C_{44}} \sum_\alpha \hat{k}^4_\alpha\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, \sigma^i_{\vec{q}_1} \sigma^i_{\vec{k}-\vec{q}_1} \sigma^j_{\vec{q}_2} \sigma^j_{\vec{k}-\vec{q}_2} \right] \tag{1.19}$$

gde doprinos koji odgovara članu sa $\vec{k} = 0$ mora biti oduzet zbog graničnih uslova (1.8). Ova procedura uslovljava pojavu dve različite 4-spinske interakcije, (videti (1.20)). U (1.19) zadržali smo malu anizotropiju rešetke, da bi se stekao osećaj o simultanom delovanju spinske i rešetkine anizotropije. Iz formule (1.19) se vidi da spinska anizotropija može da se

tretira nezavisno, zbog čega isključujemo rešetkinu anizotropiju ($f = 0$), da bi izbegli pojavu mikroskopskih nestabilnosti koje ona uzrokuje [11]. Konačno, kompletan efektivni spinski hamiltonijan koji ćemo analizirati u narednim glavama ovog rada, ima oblik

$$\mathcal{H}_{eff.} = \frac{1}{2} \sum_{i} \int_{\vec{q}} (r^i + q^2)\, \sigma^i_{\vec{q}}\, \sigma^i_{-\vec{q}} \; +$$

$$+ \sum_{i,j} u_{ij} \int_{\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2} \int_{\vec{q}_3} \sigma^i_{\vec{q}_1} \sigma^i_{\vec{q}_2} \sigma^j_{\vec{q}_3} \sigma^j_{-\vec{q}_1-\vec{q}_2-\vec{q}_3} \; +$$

$$+ \sum_{i,j} \frac{\hat{u}_{ij}}{\Omega} \int_{\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2} \sigma^i_{\vec{q}_1} \sigma^i_{-\vec{q}_1} \sigma^j_{\vec{q}_2} \sigma^j_{-\vec{q}_2} \qquad (1.20)$$

gde su četvorospinske konstante kuplovanja u_{ij} i $\hat{u}_{ij}$ date izrazima:

$$u_{ij} = u_{o,ij} - \hat{u}_{ij} \qquad (1.21)$$

$$\hat{u}_{ij} = \frac{g_i g_j}{2C_{11}} \qquad (1.22)$$

gde je, zbog izotropije rešetke, $C_{11} = C_{12} + \frac{C_{44}}{2}$.

Zadnji član u efektivnom hamiltonijanu (1.20) ima strukturu kvadrata dvospinske interakcije. Dijagonalni članovi predstavljaju ustvari jednojonsku anizotropiju u slučaju kubnog kristalnog polja [2], što se lako vidi ako se napravi inverzni Furije-transform

$$\sum_i \hat{u}_{ii} \int d^d x\, (S^i(x))^4 + 2 \sum_{i \neq j} \hat{u}_{ij} \int d^d x\, (S^i(x))^2 (S^j(x))^2 \qquad (1.23)$$

d) da opiše i proceni korekcije asimptotskog skejlinga [2,29].

2.1. Transformacije RNG

RNG je semigrupa transformacija koje deluju u jednom multidimenzionom prostoru - prostoru interakcionih parametara [4,27] hamiltonijana. Generalne ideje RNG [1,25,5] mogu biti matematički formulisane u sledeća tri koraka:

1) Početni hamiltonijan sistema $\mathcal{H}$ se transformiše (renormalizuje) primenom operatora RNG, dajući novi hamiltonijan $\mathcal{H}'$

$$R(\mathcal{H}) = \mathcal{H}' \tag{2.1}$$

Operator R deluje tako što prvo smanjuje broj stepeni slobode sistema vršeći usrednjavanje po jednom delu spinskih varijabli $\sigma_{1\vec{q}}$ gde je $\vec{q}$ talasni vektor u intervalu $\frac{\Lambda}{b}<|\vec{q}|<\Lambda$, Λ - zasek u impulsnom prostoru. Pri tom mora biti zadovoljen uslov očuvanja statističke sume sistema [2,25]. Zatim se vrši promena jedinice dužine - skaliranje prostornih promenljivih

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \frac{x}{b} \\ \vec{q} &\rightarrow \vec{q}\,' = b\vec{q} \quad , \qquad b>1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

da bi se očuvala prostorna gustina stepeni slobode i, slično, skaliranje spinskih promenljivih $\vec{S}(x)$

$$\vec{S}(x) \rightarrow \vec{S}\,'(x) = \frac{1}{c}\,\vec{S}(x) \quad , \tag{2.3}$$

koje očuvava osnovnu veličinu spinske fluktuacije. Renormalizovani hamiltonijan $\mathcal{H}'$ treba da bude uporedljiv [5] sa originalnim, tako da se efekat transformacija RNG(efektivno)ogleda u promeni (renormalizaciji) interakcionih parametara koji su ugradjeni u originalni Hamiltonijan sistema. Transformacije RNG se tako može izraziti u obliku skupa rekurentnih relacija za interakcione parametre.

2) Transformacija RNG se iterira ($R(\mathcal{H}') = \mathcal{H}''$, $R(\mathcal{H}'') = \mathcal{H}''', \ldots$) dok se ne postigne fiksna tačka transformacija

$$R(\mathcal{H}^*) = \mathcal{H}^* \tag{2.4}$$

"Položaj" Hamiltonijana $\mathcal{H}^*$ odredjen je tačkom kojoj odgovaraju fiksne vrednosti interakcionih parametara u prostoru parametara. Nije isključena mogućnost da postoji više fiksnih tačaka.

3) U blizini odredjene fiksne tačke transformacije se linearizuju, tj. R postaje neki linearni operator L, onda kada je otstojanje Hamiltonijana posle ℓ iteracija ($\mathcal{H}^{(\ell)}$) od fiksne vrednosti * malo

$$\mathcal{H}^{(\ell)} = \mathcal{H}^* + \Delta\mathcal{H}, \tag{2.5}$$

gde je $\Delta\mathcal{H}$ neki novi operator $h \cdot Q$ čije se odstupanje od $\mathcal{H}^*$ meri brojem h, tj.

$$\mathcal{H}^{(\ell+1)} = R(\mathcal{H}^*+hQ) = \mathcal{H}^*+hLQ + O(h^2) \ . \tag{2.6}$$

Pretpostavljajući da L ima kompletan skup svojstvenih operatora

$\{Q_j\}$ sa svojstvenim vrednostima Λ_j, gde Λ_j može da se napiše u obliku [2]

$$\Lambda_j = b^{\lambda_j} \tag{2.7}$$

može se $\Delta\mathcal{H}$ razviti u red po tom kompletnom skupu, tj.

$$\mathcal{H}^{(\ell)} = \mathcal{H}^* + \sum_j h_j Q_j \tag{2.8}$$

Primenom linearnog operatora RNG na ovu relaciju dobijamo:

$$\mathcal{H}^{(\ell+1)} = \mathcal{H}^* + \sum_j (h_j b^{\lambda_j}) Q_j \,. \tag{2.9}$$

S obzirom na veličinu λ_j razlikuju se tri klase svojstvenih operatora Q_j i to: relevantni ($\lambda_j>0$), marginalni ($\lambda_j=0$) i nerelevantni operatori ($\lambda_j<0$). Drugim rečima, relevantan, za kritično ponašanje sistema koji opisuje hamiltonijan $\mathcal{H}$, je onaj operator koji iteracijama transformacija RNG povećava iznos $\Delta\mathcal{H}$ i prema tome, teži da udalji hamiltonijan od fiksne tačke. Doprinos nerelevantnih operatora teži nuli sa povećanjem broja iteracija ℓ, dok su marginalni operatori "neosetljivi" na broj iteracija - njihov doprinos je konstantan. Napomenimo da je relevantnost jednog operatora za kritično ponašanje relativna u smislu da se uvek odnosi na datu fiksnu tačku. U blizini neke druge fiksne tačke isti operator može biti nerelevantan ili marginalan. Ovaj pojam je relativan još u jednom smislu. Naime, iz generalnih razmatranja u okviru RNG, proizilazi da je broj (i oblik) relevantnih operatora zavistan od dimenzionalnosti sistema. Primeri operatora koji su relevantni za svako

d su: Q_1 - gustina energije (kapling konstanta je temperatura) i Q_2 - operator spinske anizotropije (parametar sp.anizotropije). Ujedno, za d>4 ovo su jedini relevantni operatori. Kako se ide prema nižim dimenzijama, postaju relevantni gustina energije četovorospinske interakcije Q_a (d<4), gustina energije šestospinske interakcije Q_s (d<3),... Za $3 \leq d < 4$ skup relevantnih operatora je Q_1, Q_2 i Q_a. Kritično ponašanje sistema zavisi od broja relevantnih operatora koji očuvavaju simetriju Hamiltonijana, (pri čemu smisao očuvanja simetrije je takav da se ne isključuje mogućnost spontane promene simetrije u kritičnoj tački [5]). Tako napr., u trikritičnoj tački deluju dva relevantna operatora ovog tipa i jedan konstanta operator.

Na osnovu svojstvenih vrednosti koje odgovaraju relevantnim operatorima u blizini jedne fiksne tačke (skejling eksponenti) diskutuje se stabilnost te fiksne tačke i mogući krosover u oblast druge fiksne tačke.

2.2. Egzaktna primena transformacije RNG

Osnovne crte metoda RNG, koje smo ukratko formulisali u prethodnom odeljku, mogu biti konkretizovane na više načina. Ova nejednoznačnost stoji u vezi sa izborom načina skaliranja. Da ne bi uneli zabunu ovim iskazom, zadržimo se kratko na nekim konkretnim formulacijama RNG u teoriji kritičnih pojava, koje su danas poznate.

Tzv. "moderna formulacija RNG" pripada Wilsonu [1,1,25]. Generalno, način skaliranja koji stoji u osnovi ove formulacije, je vrlo različit od uobičajene renormalizacione grupe Gell-Mann

i Low [30] koja je formulisana u elektrodinamici i, takodje, razvijena za druge renormalizibilne teorije polja. Di Castro i Jona-Lasinio su pokazali [31] da RNG koja radi u teoriji polja takodje može biti primenjena na kritične fenomene, slično Wilson-ovoj RNG, pri čemu se koristi skaliranje "referentnog impulsa", koje nema tako jasan fizički smisao kao Kadanovljeva ideja spinskih blokova, koja leži u osnovi Wilsonove formulacije [1]. Pored toga, kritični indeksi takodje mogu da se izraze u ε-razvoju. Treba napomenuti da, unutar ove druge formulacija, koja se često zove multiplikativna RNG, postoji takodje nejednoznačnost u vezi sa normalizacionim uslovima. Unutar ove formulacije postoje dva prilaza, bazirana na diferencijalnim jednačinama za Green-ovu funkciju i vertekse (Lie - jednačina i Callan-Symanzik - jednačina). Značajno je napomenuti da su Brezin i saradnici [32] na osnovu Callan-Symanzik - jednačine izračunali kritične indekse u višim redovima ε-razvoja. Na osnovu takvih računa moglo se zaključiti da je ε-razvoj pre asimptotski nego konvergentan razvoj. Unutar Wilsonove RNG takodje postoji mogućnost infinitezimalne promene skale umesto skaliranja (2.2) i (2.3), što dovodi do tzv. Wilsonove diferencijalne jednačine RNG. Ovo je suština Wegner-ove [5,33] formulacije RNG, u kojoj se transformacija hamiltonijana može izraziti generalno u obliku jednačine

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = G(\psi)\mathcal{H} \qquad (2.10)$$

gde je ψ - neki funkcional od spinskih varijabli. Ovaj prilaz je pogodan za neke opšte zaključke o kritičnom ponašanju sistema reprezentovanog hamiltonijanom $\mathcal{H}$, kao napr. za egzistenciju stabilne fiksne tačke.

Dalje ćemo podrobnije prikazati Wilsonovu formulaciju RNG sa ε-razvojem oko dimenzije d=4, koji je primenjen u ovomć radu. Kratko ćemo koncipirati odgovor na pitanje postavljeno u naslovu ovog odeljka, sledeći pri tome ideje Wilsonove formulacije RNG onakve kakva ona danas izgleda, nekoliko godina posle originalne formulacije [25].

U ovom formalizmu se pretpostavlja kontinualna spinska promenljiva, zbog čega se, radi očuvanja statističke sume originalnog sistema, pojavljuje tzv. "težinska" funkcija W(S) pored hamiltonijana u eksponentu

$$e^{-w(|\vec{S}|)} = e^{\left(-\frac{1}{2}\sum_x |\vec{S}_x|^2 - \frac{u_o}{4!}\sum_x |\vec{S}_x|^4 - \dots\right)}, \quad u_o>0 \tag{2.11}$$

Zatim se prelazi na spinsko polje kao parametar uredjenja $\vec{S}_x \to \vec{S}(x)$, zanemarujući detalje rešetke, za koje se onda može napraviti Furije-transform, kao u (1.9). Radi pogodnosti koje će kasnije biti jasne, spinske promenljive se normalizuju tako da dvospinska interakcija dobije oblik

$$TSI = -\frac{1}{2}\sum_i \int_{\vec{q}} (r+q^2)\, \sigma^i_{\vec{q}}\, \sigma^i_{-\vec{q}} \tag{2.12}$$

gde je i = 1,2,...n, n - broj komponenti spina. Normalizacijom spinskih promenljivih dvospinski interakcioni parametar r postaje osnovna temperaturska promenljiva:

$$r = \left(\frac{\varkappa_B}{J' a^2}\right)(T-T_C)\ . \tag{2.13}$$

Hamiltonijan, prepisan preko σ^i_q - varijabli, dalje se redukuje

uzimanjem zaseka (Λ) u impulsnom prostoru. Veličina Λ diktirana je fizičkim uslovima, medjutim, kako je teorija nezavisna od vrednosti Λ, moguće je uzeti unapred $\Lambda=1$. (Ograničenje na oblast malih impulsa $0<|\vec{q}|<1$, karakterističnih za kritično ponašanje, je u suštini adekvatno prethodnom uvodjenju spinskog polja). Prvi korak transformacije RNG je uzimanje traga po $\sigma^i_{1\vec{q}}$ za impulse koji leže u "spoljašnjoj oblasti" $\frac{1}{b}<|\vec{q}|<1$, gde je b - proizvoljni faktor b>1. Pri tom varijable $\sigma^i_{o\vec{q}}$, sa manjim impulsima ($0<|\vec{q}|<\frac{1}{b}$), ostaju nepromenjene. Skaliranje (2.2) i (2.3), koje predstavlja drugi korak primene operatora RNG, upravo se odnosi na njih. Formalno, transformisani hamiltonijan $\mathcal{H}' = R\mathcal{H}$ imamo u eksponentu na levoj strani jednačine

$$e^{-\beta\mathcal{H}'(\sigma')} = \left\{ e^{-\beta\mathcal{H}_o(\sigma_{o\vec{q}})} \int_{(\sigma_{1\vec{q}})} e^{-\beta[\mathcal{H}_o(\sigma_{1\vec{q}}) + \tilde{\mathcal{H}}(\sigma_{o\vec{q}},\sigma_{1\vec{q}})]} \right\}_{skaliranje} \quad (2.14)$$

gde je $\mathcal{H}_o(\sigma)$ - dvospinska interakcija (2.12) a $\tilde{\mathcal{H}}(\sigma)$ svi ostali članovi hamiltonijana (kao što je istaknuto u prethodnom odeljku, za dimenzionalnost sistema $3\leq d<4$, $\tilde{\mathcal{H}}(\sigma)$ može da sadrži četvorospinsku interakciju i sve niže interakcije, isključujući (2.12). Očigledno je*)

$$\mathcal{H}_o(\sigma_{o\vec{q}} + \sigma_{1\vec{q}}) = \mathcal{H}_o(\sigma_{o\vec{q}}) + \mathcal{H}_o(\sigma_{1\vec{q}}) \ . \quad (2.15)$$

---

*)

$$\sigma^i_{1\vec{q}} = \begin{cases} \sigma^i_{\vec{q}}, & \frac{1}{b}<|\vec{q}|<1 \\ 0, & |\vec{q}|<\frac{1}{b} \end{cases}, \quad \sigma^i_{o\vec{q}} = \begin{cases} 0, & \frac{1}{b}<|\vec{q}|<1 \\ \sigma^i_{\vec{q}}, & |\vec{q}|<\frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\sigma^i_{\vec{q}} = \sigma^i_{o\vec{q}} + \sigma^i_{1\vec{q}}$$

Konačno, krucijalan korak je računanje traga po $\sigma_{1\vec{q}}$ - varijablama u (2.14), kao perturbacionog razvoja po stepenima od $\tilde{\mathcal{H}}$. Ovde je "neinteragujući" hamiltonijan $\mathcal{H}_o(\sigma_{1\vec{q}})$. Na ovaj način, $\sigma^i_{o\vec{q}}$ varijable mogu izaći, ispred naznačene integracije u (2.14) a srednje vrednosti tipa

$$\int_{(\sigma_{1\vec{q}})} e^{-\beta\mathcal{H}_o(\sigma_{1\vec{q}})} \sigma^i_{1\vec{q}_1} \sigma^j_{1\vec{q}_2} \cdots \sigma^\ell_{1\vec{q}_k} = \langle \sigma^i_{1\vec{q}_1} \cdots \sigma^\ell_{1\vec{q}_k} \rangle_o \qquad (2.16)$$

su različite od nule samo za k - parno [1], i mogu biti izražene preko proizvoda dvospinskih korelacionih funkcija $\Gamma^{ij}(q)$

$$\langle \sigma^i_{1\vec{q}_1} \sigma^j_{1\vec{q}_2} \rangle_o = \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2)\, \Gamma^{ij}(\vec{q}_1)\, \delta_{ij} \; . \qquad (2.17)$$

Primera radi, izračunajmo doprinos jednog člana koji se pojavljuje u $\tilde{\mathcal{H}}(\sigma_{o\vec{q}} + \sigma_{1\vec{q}})$ u prvom redu perturbacionog razvoja, napr. člana $\sum_{i,j} u \cdot \int_{q_1} \cdots \int_{q_4} \sigma^i_{o\vec{q}_1} \sigma^i_{1\vec{q}_2} \sigma^j_{o\vec{q}_3} \sigma^j_{1\vec{q}_4}\, \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4)$ 4-spinske interakcije. Srednja vrednost po $\mathcal{H}_o(\sigma_{1\vec{q}})$ je:

$$\sum_{i,j} \int_{(\sigma_{1\vec{q}})} e^{-\beta\mathcal{H}_o(\sigma_{1\vec{q}})}\, u \int_{\vec{q}_1} \cdots \int_{\vec{q}_4} \sigma^i_{o\vec{q}_1} \sigma^i_{1\vec{q}_2} \sigma^j_{o\vec{q}_3} \sigma^j_{1\vec{q}_4}\, \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4) =$$

$$= \sum_{i,j} u \int_{\vec{q}_1} \cdots \int_{\vec{q}_4} \delta(\vec{q}_1+\cdots+\vec{q}_4)\, \sigma^i_{o\vec{q}_1} \sigma^j_{o\vec{q}_3} \times \langle \sigma^i_{1\vec{q}_2} \sigma^j_{1\vec{q}_4} \rangle_o =$$

$$= \sum_{i,j} u \int_{\vec{q}_1} \cdots \int_{\vec{q}_4} \sigma^i_{o\vec{q}_1} \sigma^j_{o\vec{q}_3}\, \delta(\vec{q}_1+\cdots+\vec{q}_4)\, \delta(\vec{q}_2+\vec{q}_4)\, \delta_{ij}\, \Gamma(\vec{q}_2) = \sum_i u \int_{\vec{q}_1} \sigma^i_{o\vec{q}_1} \sigma^i_{o-\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2} \Gamma(\vec{q}_2) \qquad (2.18)$$

gde znak > ukazuje na integraciju u oblasti impulsa $\frac{\Lambda}{b}<|\vec{p}|<\Lambda$. Ovaj član daje doprinos dvospinskoj interakciji, pri čemu još treba izračunati integral po $\vec{p}$ u "spoljašnjoj" oblasti impulsa, a zatim skalirati $\sigma^{i}_{o\vec{q}}$ varijable.

Transparentniji i više instruktivan način zapisivanja računa perturbacionog razvoja dobija se preko tehnike Feynman-ovih dijagrama [1,2,27,38]. Označimo sa $\times$ perturbacioni hamiltonijan gde su slobodne linije spinske varijable $\sigma^{i}_{\vec{q}}$ sa impulsima $\vec{q}$ u smislu da ulaze u čvor; tački preseka tih linija pridružimo interakcionu konstantu (komplikovaniji perturbacioni hamiltonijan zahteva uvodjenje različitih oznaka za interakcione čvorove) i konzervirajmo impuls u čvoru. Doprinosi $\tilde{\mathcal{H}}$ dvospinskoj interakciji su, u principu, sve kontrakcije koje ostavljaju dve slobodne linije sl. 1a), pri čemu slobodne linije pretstavljaju



sl. 1.

$\sigma^{i}_{o\vec{q}}$ - varijable, a unutrašnjim linijama odgovaraju integrali

$$\int\limits_{\vec{p}}^{>} \Gamma(\vec{p}) \;, \quad \int\limits_{\vec{p}_1}^{>}\int\limits_{\vec{p}_2}^{>} \Gamma(\vec{p}_1)\Gamma(\vec{p}_2),\ldots, \;.$$

Slično, doprinosi četvorospinskoj interakciji potiču od dijagrama koji su dati na sl. 1b), sa različitim brojnim faktorima, koje treba izračunati posebno za svaki dijagram. Nije teško za odredjeni vid perturbacionog hamiltonijana nacrtati moguće dijagrame sa dve, četiri itd. slobodnih linija. Brojni faktor

ispred jednog odredjenog dijagrama je proizvod iz:

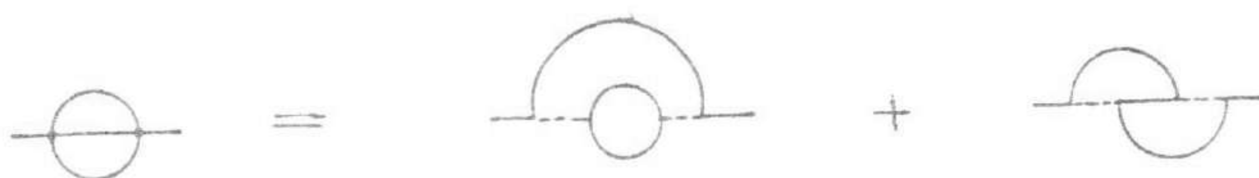
1) $\frac{1}{k!}$, k - broj preseka spinskih linija, koji nose interakcionu konstantu;

2) faktora simetrije;

3) broja načina izbora (odredjenog broja) slobodnih linija i

4) broja načina kontrahovanja preostalih spinskih linija.

Ovde treba još dodati sumiranje po spinskom indeksu (i=1,2,...n) u svakoj zatvorenoj spinskoj petlji, kad takve postoje. Ilustrujjmo ovo na primeru računanja doprinosa dijagrama $-\ominus-$ dvospinskoj interakciji. On je ekvivalentan dvama dijagramima u kojima smo, radi očiglednosti, "razvukli" verteks:



sl. 2.

od kojih prvi ima zatvorenu spinsku petlju, a drugi faktor simetrije 2. Doprinosi ovih dijagrama su redom:

$$\frac{1}{2!}(4.4)\times(2.2)\times(1)\ \times n \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{2!}(4.4)\times(2.2)\times(1)\times 2$$

tri unutrašnje (propagatorske) linije, iz zakona konzervacije impulsa u čvoru, odgovaraju integraciji po $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$ od $\Gamma(\vec{p}_1)\Gamma(\vec{p}_2)\Gamma(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{q})$. Tj., doprinos dvospinskoj integraciji $\sum_i \sigma^i_{o\vec{q}}\,\sigma^i_{o-\vec{q}}$ koji potiče od posmatranog dijagrama je

$$-\ominus- = 32(n+2) \int\limits_{\vec{p}_1}^{>}\int\limits_{\vec{p}_2}^{>} \Gamma(\vec{p}_1)\Gamma(\vec{p}_2)\Gamma(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{q}) \tag{2.19}$$

Pošto je $\mathcal{H}_o$ dato izrazom (2.12), dvospinska korelaciona funkcija je oblika:

$$\Gamma^{ij}(\vec{q}) = \frac{1}{\vec{q}^{\,2}+r}\,\delta_{ij}\,. \qquad (2.20)$$

Nakon računanja doprinosa dijagrama, preostaje da se skaliraju $\sigma^{i}_{o\vec{q}}$ i $\vec{q}$ varijable

$$(\sigma^{i}_{o\vec{q}}) \rightarrow \zeta\sigma'^{i}_{q'}$$

$$\vec{q} \rightarrow b\vec{q}\,. \qquad (2.21)$$

Faktor skaliranja spinova, ζ, bira se iz uslova uporedljivosti transformisanog hamiltonijana $\mathcal{H}'$ sa originalnim $\mathcal{H}$. Još preciznije, faktor uz q^2 u transformisanoj dvospinskoj interakciji treba da bude 1, uz zahtev da je ovo i jedina q-zavisnost u korelacionoj funkciji [1]. Iz ovog formalnog zahteva sledi*)

$$\zeta^2 = b^{d+2-\eta} \qquad (2.22)$$

gde je η - kritični indeks korelacione funkcije.

Pojava kritičnog indeksa η u (2.22) zahteva nešto dublju analizu, pomoću koje ćemo doći do načina kako se η odredjuje u formalizmu RNG. Ovo ćemo pokazati za kruti Heisenbergov model, za koji $\tilde{\mathcal{H}}$ sadrži običnu 4-spinsku interakciju sa konzervacionim uslovom $\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4 = 0$ i nekom interakcionom konstantom u_o. Posle transformacije RNG dvospinska interakcija za izotropni kruti Heisenbergov model ima oblik:

*) Izbor ovakvog faktora skaliranja ζ sadrži dublju, principijelnu informaciju o korespodenciji fiksne tačke transformacija RNG i kritične tačke [2].

$$(TSI)' = \zeta^2 b^{-d-2} \int_{0<|\vec{q}|<1} G^{'i}_{\vec{q}'} G^{'i}_{-\vec{q}'} \Big(q'^2 + r' - b^2 4(n+2) u_0 \,\Omega\, + \qquad (2.23)$$
$$+ b^2 \cdot 32 (n+2) u_0^2 \,\ominus\, \Big)$$

u drugom redu perturbacionog razvoja. Na osnovu (2.20), izraz u zagradi na desnoj strani je inverzna korelaciona funkcija posle transformacije. Prepišimo je u obliku

$$\left[\Gamma^{ij}(\vec{q}')\right]^{-1} = \left[\Gamma_0^{ij}(\vec{q}')\right]^{-1} + \Sigma(\vec{q}') \qquad (2.24)$$

gde je $\Gamma_0^{ij}(\vec{q})$ dato sa (2.20) - dvospinska korelaciona funkcija "neinteragujućeg" sistema, a energetski deo $\Sigma(\vec{q})$ sadrži doprinose dijagrama. Relacija slična (2.24) važi i za kritične vrednosti ovih veličina Γ^{ij*} i Σ^*. Imajući u vidu da se $\Gamma^{ij}(\vec{q})$ ponaša kao $q^{-2+\eta}$ u kritičnoj tački i da je $\vec{q}' = \vec{q}/b$, imamo

$$\left[\Gamma^{ij}(\vec{q})^*\right]^{-1} = \left\{\left[\Gamma_0^{ij}(\vec{q}/b)^*\right]^{-1} + \Sigma^*(\vec{q}/b)\right\} \cdot b^{2-\eta}. \qquad (2.25)$$

Lako je videti [27] da, ako je Σ^* nezavisno od impulsa, mora biti $\eta = 0$. Drugim rečima, q-zavisni dijagrami u zagradi na desnoj strani jednačine (2.23) odredjuju kritični eksponent η. Kao što smo videli, dijagram drugog reda $\ominus$ je najniži dijagram koji odredjuje η. Impulsna zavisnost ovog dijagrama se "prebacuje" u eksponent ispred integrala u (2.23), a doprinos dijagrama se računa kao da je $q = 0$. Tako faktor ispred integrala postaje $\zeta^2 b^{-d-2+\eta}$, odakle, izjednačavanjem sa jedinicom dobijamo (2.22).

Iz izraza za inverznu korelacionu funkciju

$$\left[\Gamma^{ij}(\vec{q})\right]^{-1} = \left[\Gamma_0^{ij}(\vec{q})\right]^{-1} + 4(n+2) u_0 \,\Omega\, - 32(n+2) u_0^2 \,\ominus \qquad (2.26)$$

q - zavisnost prvog i zadnjeg člana možemo izdvojiti u obliku

$$\Gamma^{ij}(\vec{q},r=0) = \frac{1}{q^2}(1+32(n+2)u^*\ell nq + \ldots) \qquad (2.27)$$

koji je uporedljiv sa poznatim ponašanjem

$$\Gamma^{ij}(\vec{q}) = \frac{1}{q^2}(1 + \eta\ell nq + \ldots), \qquad (2.28)$$

podrazumevajući neposrednu blizinu kritične tačke ($r = 0$, $u_0 = u^*$). Upoređjivanjem (2.27) i (2.28) dobijamo

$$\eta = 8(n+2)(u^*)^2 \cdot (\hat{C}_4)^2 \qquad (2.29)$$

za izotropni kruti Heisenberg-ov model.

Postupak za dobijanje drugih kritičnih indeksa zahteva linearizaciju operatora RNG i računanje skejling eksponenata relevantnih operatora. Ovo će biti predmet sledećeg odeljka. Ovde napomenimo da je dovoljno izračunati još jedan kritični eksponent, u prilazu preko RNG, pošto se unutar ovog formalizma pokazuje [2,27] važenje skejling relacija.

2.3. Svojstvene vrednosti matice linearnog operatora RNG i kritični indeksi

Unutar formalizma RNG temperaturska promenljiva r, transformiše se u skladu sa rekurentnom relacijom koja, nezavisno od modela, izgleda ovako:

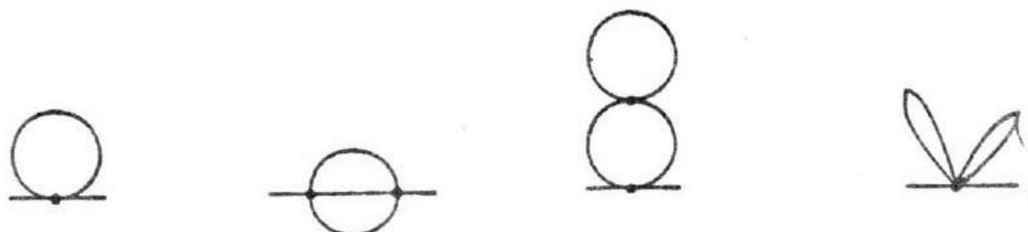
$$r' = b^{2-\eta}\{r + \Sigma(\vec{q},r,u,\ldots)\} \qquad (2.30)$$

gde $\Sigma(\vec{q},r,u,\ldots)$ označava doprinose svih dijagrama renormalizaciji dvospinske korelacione funkcije. Iteracijama $r \to r^*$, gde je r^* funkcija od fiksnih vrednosti drugih parametara i ne mora biti nula. Pogodno je uvesti novu promenljivu r_o tako da je

$$r_o^* \propto \left[\Gamma_o^{ij}(q=0)\right]^{-1} \tag{2.31}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = TSI(r_o) - \frac{1}{2} \sum_i \int_{\vec{q}} (r-r_o)\sigma_{\vec{q}}^i \sigma_{-\vec{q}}^i + FSI \tag{2.32}$$

Dodatni član u hamiltonijanu, tzv. "mas-renormalizacioni" član treba takodje smatrati perturbacionim članom. Osnovni hamiltonijan sadrži parametar r_o, koji će se, prema tome, pojaviti u propagatoru $\Gamma^{ij}(r_o,\vec{q})$ u dijagramskoj tehnici. Prisustvo "mas--renormalizacionog" člana u hamiltonijanu daje jedan dodatni broj dijagrama koji učestvuju u rekurentnim relacijama za interakcione parametre. U rezultatu, oni poništavaju doprinose nekih dijagrama od originalnog perturbacionog člana. Bruce, Droz i Aharony [35] su pokazali da je postupak "mas-renormalizacije" neophodan za pravilno računanje kritičnih indeksa u formalizmu RNG. Oni su razradili postupak kojim se "prepoznaju" doprinosi originalnih dijagrama koji bi bili poništeni "mas-renormalizacijom". Zato se i ovakvi dijagrami zovu "mas-renormalizacioni". Naime, dijagrami koji doprinose renormalizaciji parametara r do drugog reda su



sl. 3.

zadnji dijagram potiče od 6-spinske interakcije, koja je nerelevantan operator. Doprinos ovog dijagrama otsustvuje u linearizovanim rekurentnim relacijama i prema tome ne može uticati na kritične indekse [35]. Doprinos prvog dijagrama je

$$= (2n+4)\ \frac{u}{4} A(r) \qquad (2.33)$$

gde je $A(r) = \int_q^{>} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{r+q^2}$.

Treći od dijagrama na slici je "mas-renormalizacioni":

$$= \frac{1}{2}\ (64+32n+32n+16n^2)\ (\frac{u}{4})^2 \cdot \pi(r)\cdot A(r) \qquad (2.34)$$

$$\text{gde je} \quad \pi(r) = \int_q^{>} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r+q^2)^2} = -\frac{dA(r)}{dr} .$$

Na osnovu ovoga imamo:

$$r' = b^{2-\eta}(r+(n+2)uA(r)+(n+2)^2u^2A(r)\ \frac{dA(r)}{dr} +\ldots)$$

odnosno, zbir doprinosa (2.33) i (2.34) je

$$(n+2)uA(r'/b^{2-\eta}) . \qquad (2.35)$$

Slično, iz rekurentne relacije za parametar u nalazimo da je zbir doprinosa sledeća dva dijagrama

$$= -u^2(n+8)\ \pi(r'/b^{2-\eta}) , \qquad (2.36)$$

gde je drugi dijagram "mas-renormalizacioni". U suštini, efekat

"mas-renormalizacije" se sastoji u "oblačenju" unutrašnjih linija dijagrama, stavljanjem $r \to \frac{r}{b^{2-\eta}}$. Primetimo da ovaj izbor, za veliko b, što predstavlja jedino ograničenje tehnike razvijene u [35], zadovoljava postavljeni zahtev na ponašanje r^*, jedn. (2.31). Sa ovim, "mas-renormalizacioni" dijagrami otpadaju u računanju fiksnih vrednosti parametara, medjutim to nije slučaj u linearizovanim rekurentnim relacijama, te zbog toga svi "mas-renormalizacioni" dijagrama moraju biti unapred odbačeni. Ovakav način uračunavanja efekta "mas-renormalizacije" na rekurentne relacije interakcionih parametara u suštini se svodi na računanje integrala po unutrašnjim linijama dijagrama $A(r)$, $\pi(r),\ldots$, koristeći razvoj propagatorske funkcije u red po r i uzimanjem samo prvog člana $A(0)$, $\pi(0),\ldots$.

Ovaj postupak [35] je ekvivalentan uvodjenju dodatnog člana u hamiltonijanu, što možemo pokazati, polazeći od (2.30), da je r^* odredjeno jednim konzistentnim uslovom. Iz (2.30) sledi:

$$r^* = b^{2-\eta}\left\{r^* + \Sigma^*(0) + (\Sigma^*(q,r^*,u^*,\ldots) - \Sigma^*(0))\right\} \quad (2.37)$$

odnosno,

$$r_o^* = r^* + \Sigma^*(0) \quad (2.38)$$

gde je $\Sigma^*(0)$ energetski deo za $q = 0$ i $T = T_C$. Jednačina (2.38) predstavlja konzistentni uslov iz koga se odredjuje r_o^*, naime, za veliko b imamo

$$\frac{r^*}{b^{2-\eta}} = r_o^* + \Sigma^*(\vec{q}, \frac{r^*}{b^{2-\eta}}, u^*,\ldots) \quad (2.39)$$

odnosno

$$r_o^* = \Sigma^*(\vec{q},0,u^*,\ldots) \qquad (2.40)$$

iz čega je oduzet deo koji odgovara $q = 0$, jer je on uračunat u r_o^*.

Pošto se transformacija hamiltonijana pomoću operatora RNG egzaktno izražava skupom rekurentnih relacija za interakcione parametre, onda se i linearizacija transformacija RNG, u istoj meri, odnosi na linearizaciju tih rekurentnih relacija. Transformacija se linearizuje u blizini fiksne tačke $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(r^*,u^*,\ldots)$, u smislu

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* + \Delta\mathcal{H} \qquad (2.41)$$

gde je $\Delta\mathcal{H} = (\Delta r, \Delta u, \ldots)$, malo otstupanje od fiksnog hamiltonijana. Zanemarujući članove koji nisu linearni po malim otstupanjima Δr, Δu,... iz linearizovanih rekurentnih relacija formiramo matricu transformacije RNG u prostoru parametara. Svojstvene vrednosti ovakve matrice, Λ_i, pripadaju relevantnim svojstvenim operatorima operatora RNG. Zbog relacije (2.7), λ_i se nazivaju i skejling eksponenti relevantnih operatora. Oni stoje u vezi sa kritičnim indeksima na sledeći način: Λ_1 - najveća svojstvena vrednost, odredjuje kritični indeks ν prema relaciji [1-4,35]

$$\nu = \frac{\ell n b}{\ell n \Lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} \ . \qquad (2.42)$$

Preostali Λ_i, $i \neq 1$, korespondiraju drugim relevantnim operatorima koji su odgovorni za krosover efekte [2,4]. One odredjuju krosover eksponente [2,4,36,37,38], prema relaciji

$$\phi_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \tag{2.43}$$

koja pripada Fisheru [2]. Drugi kritični indeksi γ, α, β, δ, mogu biti odredjeni na osnovu poznatih skejling relacija, kada su nadjeni η i ν. Treba, medjutim, napomenuti da je moguće računati svaki od ovih indeksa nezavisno, unutar formalizma RNG [32,34,39].

Linearizacija rekurentnih relacija RNG, kao i računanje kritičnih eksponenata, odnosi se uvek na jednu odredjenu fiksnu tačku. Krosover eksponenti daju meru relevantnosti odredjenih operatora u blizini te fiksne tačke. $\phi_i > 0$ ukazuje na nestabilnost date fiksne tačke u odnosu na prisustvo i-tog relevantnog operatora, koje dovodi do krosovera u drugu, stabilniju fiksnu tačku. Osim toga, diskusija stabilnosti fiksnih tačaka na osnovu krosover eksponenata daje i neke topološke karakteristike problema u prostoru parametara.

Da zaključimo ovo izlaganje napomenom da svaka od fiksnih tačaka transformacija RNG na hamiltonijanu sistema uključujući i mogućnost "konkurencije" medju njima u smislu veće stabilnosti, a priori može opisivati njegovo kritično ponašanje. Medjutim, u ovom formalizmu postoji i jedna restrikcija univerzalnosti - svaka fiksna tačka ima svoj domen privlačenja. Granice tih domena takodje se mogu globalno računati [40] unutar ε-razvoja. Kritično ponašanje sistema će odredjivati ona fiksna tačka u čijem se domenu nalaze nerenormalizovane vrednosti interakcionih parametara, što je diktirano fizičkim uslovima. Nepostojanje (ili nepostizanje) stabilne fiksne tačke tumači se kao fazni prelaz prvog reda [6,8,16,41].

II GLAVA: TRANSFORMACIJE RNG NA EFEKTIVNOM SPINSKOM HAMILTONIJANU - REKURENTNE RELACIJE I FIKSNE TAČKE

3. Rekurentne relacije

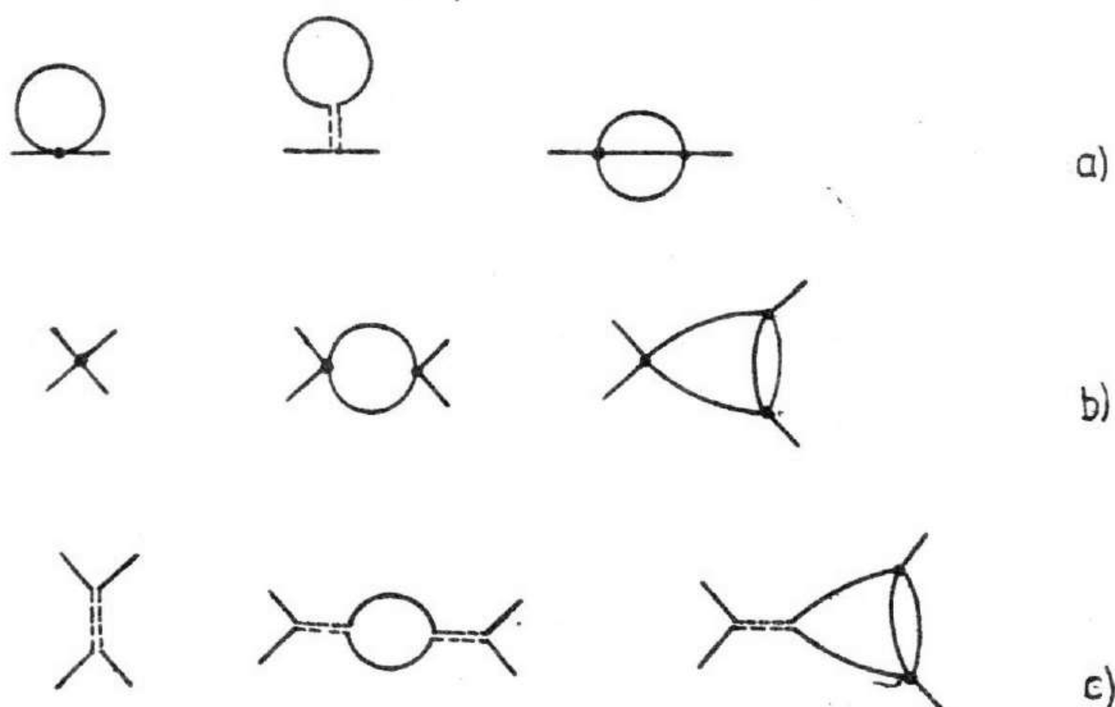
Prikazani formalizam RNG primenjujemo na efektivni spinski hamiltonijan (1.20) koji sadrži potrebne informacije o d-dimenzionom, d=3 , anizotropnom magnetnom sistemu sa n-komponentnim parametrom uredjenja kuplovanim sa elastičnom rešetkom. U skladu sa formalizmom RNG, tražimo rekurentne relacije za interakcione parametre r^i, u_{ij} i $\hat{u}_{ij}$ koji su ugradjeni u hamiltonijan (1.20).

U prvom koraku, naša analiza je formalna, u smislu da ne vodimo računa o obliku funkcija r^i, u_{ij} i $\hat{u}_{ij}$, koje su date relacijama (1.14), (1.21) i (1.22). Dijagrami koji daju doprinose rekurentnim relacijama ovih interakcionih parametara dati su na slici 4. Tačkom u dijagramu predstavlja se interakcioni parametar u_{ij}, duplom isprekidanom linijom - interakcioni parametar $\hat{u}_{ij}$, a unutrašnje linije sadrže $\Gamma^{ij}(\vec{q})$

$$\Gamma^{ij}(\vec{q}) = \frac{1}{r^i+q^2}\,\delta_{ij} \tag{3.1}$$

kao propagator. Primetimo da, zbog oblika 4-spinske interakcije sa interakcionim parametrom $\hat{u}_{ij}$, duploj isprekidanoj liniji u

dijagramima odgovara $\vec{q} = 0$. Zbog toga svi dijagrami koji sadrže petlju od dvostruke isprekidane linije postaju q-zavisni i, njihovi doprinosi (deljenje sa Ω u zadnjem članu (1.20)!) teže nuli u termodinamičkom limesu (videti apendiks, A-1). Doprinosi rekurentnim relacijama za r^i do drugog reda potiču od dijagrama na sl. 4a), a dijagrami koji doprinose u_{ij} i $\hat{u}_{ij}$ do trećeg reda dati su na sl. 4b) i 4c) respektivno.



sl. 4.

Dijagrami čiji doprinosi teže nuli u termodinamičkom limesu su odbačeni, kao i "mas-renormalizacioni" dijagrami. Računanje doprinosa dijagrama sa sl. 4) u opštem slučaju spinske anizotropije, koja smanjuje simetriju hamiltonijana, je moguće na način koji smo izneli u pregledu metoda RNG, ukoliko dozvolimo nešto generalniji oblik 4-spinskih konstanti u_{ij} i $\hat{u}_{ij}$. Naime, u skladu sa simetrijom hamiltonijana (1.20) u spinskom prostoru, možemo uzeti

$$u_{ijk\ell} = \frac{1}{3}(u_{ij}\delta_{ik}\delta_{j\ell}+u_{ik}\delta_{ij}\delta_{k\ell}+u_{ij}\delta_{i\ell}\delta_{jk}) \qquad (3.2)$$

i

$$\hat{u}_{ijk\ell} = \hat{u}_{ij}\delta_{ij}\delta_{k\ell}. \qquad (3.3)$$

Imajući u vidu relacije (3.2) i (3.3), nije teško dobiti doprinose pomenutih dijagrama rekurentnim relacijama. Posle skaliranja spoljašnjih (spinskih) linija dijagrama faktorom

$$\zeta = b^{d+2-\eta_i} \qquad (3.4)$$

i uporedjivanja sa poznatom formom hamiltonijana, dobijamo sledeće rekurentne relacije interakcionih parametara:

$$(r^i)' = b^{2-\eta_i}\Big\{r_i+4\Big[\sum_\ell (u_{i\ell}+\hat{u}_{i\ell}) \int_{\vec{p}}^{>} \Gamma^{\ell\ell}(\vec{p})+2u_{ii} \int_{\vec{p}}^{>} \Gamma^{ii}(\vec{p})\Big] -$$

$$- 32\Big[\sum_\ell u_{i\ell}u_{\ell i} \int_{\vec{p}_1}^{>}\int_{\vec{p}_2}^{>} \Gamma^{ii}(\vec{p}_1)\Gamma^{\ell\ell}(\vec{p}_2)\Gamma^{\ell\ell}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) +$$

$$+ 2u_{ii}u_{ii} \int_{\vec{p}_1}^{>}\int_{\vec{p}_2}^{>} \Gamma^{ii}(\vec{p}_1)\, \Gamma^{ii}(\vec{p}_2)\Gamma^{ii}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\Big]\Big\} \qquad (3.5)$$

$$(u_{ij})' = b^{\varepsilon-\eta_i-\eta_j}\Big\{u_{ij}-4\Big[\sum_\ell u_{i\ell}u_{\ell j} \int_{\vec{p}}^{>}\big(\Gamma^{\ell\ell}(\vec{p})\big)^2 +$$

$$+ 2u_{ij}\Big(u_{ii} \int_{\vec{p}}^{>}\big(\Gamma^{ii}(\vec{p})\big)^2 + u_{jj} \int_{\vec{p}}^{>}\big(\Gamma^{jj}(\vec{p})\big)^2\Big) +$$

$$+ 4u_{ij}u_{ji} \int_{\vec{p}}^{>} \Gamma^{ii}(\vec{p})\, \Gamma^{jj}(\vec{p})\Big] + \dots \Big\} \qquad (3.6)$$

i konačno

$$(\hat{u}_{ij})' = b^{\varepsilon-\eta_i-\eta_j}\left\{\hat{u}_{ij} - 4\sum_{\ell}\hat{u}_{i\ell}\hat{u}_{\ell j}\int_{\vec{p}}^{>}\left(\Gamma^{\ell\ell}(\vec{p})\right)^2 - \right.$$

$$- 8\left[\sum_{\ell} u_{i\ell}\hat{u}_{\ell j}\int_{\vec{p}}^{>}\left(\Gamma^{\ell\ell}(\vec{p})\right)^2 + 2u_{ii}\hat{u}_{ij}\int_{\vec{p}}^{>}\left(\Gamma^{ii}(\vec{p})\right)^2\right] +$$

$$\left. + \ldots \right\} \qquad (3.7)$$

gde su izostavljeni doprinosi dijagrama trećeg reda u (3.6) i (3.7). Ovde je $\varepsilon \equiv 4-d$, parametar koji se prirodno javlja kao posledica skaliranja. Formalno, η_i u eksponentu zavisi od toga koji od spinskih pravaca posmatramo i njegov smisao će biti jasan kada predjemo na konkretan oblik spinske anizotropije (odeljak 3.2).

3.1. Fiksne tačke izotropnih rekurentnih relacija. Slaba dvospinska anizotropija

Rekurentne relacije (3.5), (3.6) i (3.7) u opštem obliku svojom formom odražavaju simetriju originalnog hamiltonijana sa proizvoljnom izmenskom anizotropijom Δ_i. Iz ovih relacija možemo diskutovati spinski izotropan sistem i slabu anizotropiju, kao specijalne slučajeve. Medjutim, slučaj jake anizotropije zahteva konkretan oblik spinske anizotropije i, u skladu sa tim, specijalan tretman unutar formalizma RNG.

Slučaj potpuno izotropnog sistema dobijamo stavljajući

$$u_{ij} = u\delta_{ij}, \quad \hat{u}_{ij} = \hat{u}\delta_{ij} \quad \text{i} \quad \Gamma^{ii}(\vec{p}) = \frac{1}{r+q^2} \qquad (3.8)$$

$$\eta_i = \eta_j = \eta, \quad r^i = r_o, \; g^i = g_o$$

što odgovara $\Delta_i = 0$ u originalnom hamiltonijanu. Rekurentne

relacije (3.5), (3.6) i (3.7) tada postaju:

$$r' = b^{2-\eta}\left\{r+4(n+2)uA(r)+4n\hat{u}A(r)-32(n+2)u^2D(r)\right\} \quad (3.9)$$

$$u' = b^{\varepsilon-2\eta}\left\{u-4u^2(n+8)\pi(0)+64u^3(5n+22)D(0)\right\} \quad (3.10)$$

$$\hat{u}' = b^{\varepsilon-2\eta}\left\{\hat{u}-4n\hat{u}^2\pi(0)-8(n+2)u\hat{u}\pi(0)+\right.$$

$$\left.+64u^2\hat{u}\cdot 3(n+2)D(0)\right\} \quad (3.11)$$

gde su sa $A(r)$, $\pi(r)$ i $D(r)$ obeležni integrali po propagatorskim linijama sa izotropnim propagatorom $\Gamma(\vec{p})$ iz (3.8)

$$A(r) = \int_{\frac{1}{b}<|\vec{q}|<1} \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{q^2+r} \quad (3.12)$$

$$\pi(r) = \int_{\frac{1}{b}<|\vec{q}|<1} \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(q^2+r)^2} \quad (3.13)$$

i

$$D(r) = \iint_{\substack{\vec{q}\,\vec{p}\\ \frac{1}{b}<|\vec{q}|<1,\ \frac{1}{b}<|\vec{p}|<1}} \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(q^2+r)(p^2+r)\left((\vec{q}+\vec{p})^2+r\right)} \quad (3.14)$$

a zatim stavljeno, u skladu sa "mas-renormalizacijom" [35] r=0. (Vrednosti ovih integrala date su u tabeli 1. na kraju rada). Primetimo da je struktura rekurentnih relacija (3.5), (3.6) i (3.7), odnosno odgovarajućih izotropnih relacija (3.9), (3.10) i (3.11) takva da, prvo, ne dozvoljava doprinose $\hat{u}$-interakcije interakciji u i, drugo,da $\hat{u}$-interakcija učestvuje u rekurentnoj

relaciji za r samo u prvom redu perturbacionog razvoja. Ovo zadnje je posledica iščezavanja dijagrama sa zatvorenim petljama duple isprekidane linije u termodinamičkom limesu. Odavde je jasno da će kritični indeks η biti odredjen samo iz doprinosa u-interakcije. U slučaju izotropnog modela, η je isto kao za, kruti Heisenbergov model, (formula (2.29), gde je u^* dato u (3.17)).

Izotropne rekurentne relacije (3.10) i (3.11) imaju četiri fiksne tačke $(u^*, \hat{u}^*)$. Fiksne vrednosti interakcionih parametara, koje odredjuju te fiksne tačke, računati su u drugom redu po ε. Fiksne tačke potpuno izotropnog kompresibilnog modela su:

$$1)\quad (u^{*G} = 0,\ \hat{u}^{*G} = 0) \qquad (3.15)$$

$$2)\quad (u^{*I} = 0,\ \hat{u}^{*I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{4n} + (\varepsilon^3)), \qquad (3.16)$$

$$3)\quad (u^{*H} = \frac{\bar{\varepsilon}}{4(n+8)}\left(1 + \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\,\varepsilon\right),\ \hat{u}^{*H} = 0) \qquad (3.17)$$

i

$$4)\quad (u^{*C} = (u^*)^H,\ \hat{u}^{*C} = \frac{\bar{\varepsilon}}{4n(n+8)}\left(4-n-\frac{(n+2)(13n+44)}{(n+8)^2}\,\varepsilon^2\right), \qquad (3.18)$$

gde je $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\hat{C}_d}$, $\hat{C}_d = \dfrac{2^{1-d}\pi^{-d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

Ovakve fiksne tačke ranije su nadjene kod izotropnih kompresibilnih feromagnetika sa jednokomponentnim (n=1) parametrom uredjenja [12] i sa n-komponentnim parametrom uredjaja [8] u prvom redu po ε. Iste fiksne tačke kontrolišu kritično ponašanje kompresibilnih feromagnetika sa anizotropijom rešetke

[11,16]. Relacija (3.15) definiše fiksnu tačku koja bi bila jedina fiksna tačka spin-izotropnog Gauss-ovog modela, tj. u otsustvu obe 4-spinske interakcije u polaznom hamiltonijanu. U odnosu na model (1.20) ovo je trivijalna fiksna tačka. Slično, (3.16) bi opisivala kritično ponašanje jednog generalisanog Ising-ovog modela, a (3.17) odgovara ortodoksnom krutom Heisenberg-ovom modelu. Fiksna tačka (3.18) bi odgovarala kritičnom ponašanju modela sa dve 4-spinske interakcije ili "constained" modela. Koja od ovih fiksnih tačaka opisuje kritično ponašanje sistema? Odgovor na ovo pitanje daje formalno informacija o kompetentnosti pojedinih fiksnih tačaka, koja se dobija iz uslova (njihove) stabilnosti u odnosu na 4-spinske perturbacije (u - i $\hat{u}$-interakcije).

Stabilnost fiksne tačke "meri" se relevantnošću perturbujućih interakcija u blizini te tačke. Skejling eksponenti 4-spinskih u- i $\hat{u}$-interakcija dobijaju se kao svojstvene vrednosti linearne matrice transformacije RNG, koja je predstavljena rekurentnim relacijama (3.10) i (3.11). Linearizacija ovih rekurentnih relacija podrazumeva

$$u = u^* + \Delta u \ , \qquad u' = u^* + (\Delta u)'$$
$$\hat{u} = \hat{u}^* + \Delta\hat{u} \ , \qquad \hat{u}' = \hat{u}^* + (\Delta\hat{u})' \tag{3.19}$$

pri čemu treba voditi računa i o zavisnosti eksponenta η od u^* [1,35] prema relaciji

$$\eta = 8(n+2)(u^*)^2\, \hat{C}_4^{\,2} \tag{3.20}$$

gde je $C_4 = C_d$, za $d = 4$. Vodeći računa o vrednostima integrala koji se pojavljuju u rekurentnim relacijama, dobijamo

$$(\Delta u)' = b^{\varepsilon}\left[1-8u^{*}(n+8)\hat{C}_d \ell nb-16(n+2)\cdot 3(u^{*})^{2}\hat{C}_4^{\,2}\ell nb\right]\cdot \Delta u \tag{3.21}$$

i

$$(\Delta\hat{u})' = b^{\varepsilon}\left[1-8(n+2)u^{*}\hat{C}_d \ell nb-8n\hat{u}^{*}\hat{C}_d\cdot \ell nb-16(n+2)(u^{*})^{2}\hat{C}_4^{\,2}\ell nb + 32\cdot 3(n+2)(u^{*})^{2}\hat{C}_4^{\,2}\ell nb\right]\cdot \Delta\hat{u} - \left[8(n+2)\hat{u}^{*}\hat{C}_d \ell nb+32(n+2)u^{*}\hat{u}^{*}\hat{C}_4^{\,2}\ell nb\right]\Delta u \tag{3.22}$$

gde još nismo specificirali vrednosti u^{*} i $\hat{u}^{*}$. Iz (3.21) i (3.22), stavljajući za u^{*} i $\hat{u}^{*}$ odgovarajuće vrednosti koje definišu različite fiksne tačke (3.15), (3.16), (3.17) i (3.18) dobijamo linearne matrice transformacija M

$$\begin{pmatrix}(\Delta u)' \\ (\Delta\hat{u})'\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}\Delta u \\ \Delta\hat{u}\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

u blizini različitih fiksnih tačaka. Dijagonalizacijom ovih matrica nalazimo njihove svojstvene vrednosti u obliku b^{λ_u} i $b^{\lambda_{\hat{u}}}$, gde su:

$$\lambda_u^G = \varepsilon, \qquad \lambda_{\hat{u}}^G = \varepsilon \tag{3.24}$$

$$\lambda_u^I = \varepsilon, \qquad \lambda_{\hat{u}}^I = -\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{3.25}$$

$$\lambda_u^H = -\varepsilon - \frac{3(7n+30)}{(n+8)^2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{3.26a}$$

$$\lambda_{\hat{u}}^H = \frac{4-n}{n+8}\varepsilon - \frac{(n+2)(13n+44)}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{3.26b}$$

$$\lambda_u^C = \lambda_u^H \quad (3.27a)$$

$$\lambda_{\hat{u}}^C = -\lambda_{\hat{u}}^H \quad (3.27b)$$

gde gornji indeksi označavaju na koju fiksnu tačku se odnosila matrica transformacije.

Iz ovih formula se odmah vidi da je trivijalna fiksna tačka (G) nestabilna u odnosu na obe 4-spinske perturbacije ($\varepsilon>0$); slično, Isingova fiksna tačka (I) je nestabilna u odnosu na u-perturbaciju hamiltonijana (1.20) a stabilna u odnosu na $\hat{u}$-perturbaciju ($\lambda_{\hat{u}}^I < 0$). Heisenbergova fiksna tačka je stabilna u odnosu na u-perturbaciju ($\lambda_u^H < 0$), medjutim može biti nestabilna u odnosu na prisustvo $\hat{u}$-interakcije u (1.20). Naime, $\lambda_{\hat{u}}^H$ kao funkcija broja spinskih komponenti (3.26b) može biti i pozitivno i negativno,

$$\lambda_{\hat{u}}^H > 0, \qquad \text{za } n < 4-4\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \; . \quad (3.28)$$

Komplementarna oblast ($n>4-4\varepsilon$) je oblast stabilnosti Heisenberg-ove fiksne tačke izotropnog kompreisibilnog modela. Prema (3.27 a i b), četvrta fiksna tačka (3.18) je stabilna u oblasti malih n, tj. za $n<4-4\varepsilon$. Dakle, za kritično ponašanje izotropnog kompresibilnog feromangeta sa malim brojem komponenata parametra uredjenja je odgovorna "constained" fiksna tačka (3.18). Izotropni kompresibilni model sa većim ($n>4-4\varepsilon$) brojem komponenti parametra uredjenja bi imao kritično ponašanje kao kruti Heisenberg-ov model.

Svakoj od fiksnih tačaka (3.15), (3.16), (3.17) i (3.18) odgovara po jedna fiksna vrednost parametra r, prema rekurentnoj

relaciji (3.9). Od principijelnog značaja je činjenica da su ove vrednosti

$$r^{*G} = 0 \tag{3.29}$$

$$r^{*I} = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \tag{3.30}$$

$$r^{*H} = - \frac{n+2}{n+8}\varepsilon - \frac{3(n+2)(3n+14)}{(n+8)^3}\varepsilon^2 \tag{3.31}$$

$$r^{*C} = - \frac{3\varepsilon}{n+8} + \frac{n^2-18n-188}{2(n+8)^3}\varepsilon^2 \tag{3.32}$$

konačne (videti IV Glavu). Linearizacijom rekurentne relacije (3.9), nezavisno od preostalih dveju relacija, dobija se

$$(\Delta r)' = b^{\lambda}\,\Delta r \tag{3.33}$$

gde je λ - skejling eksponent izotropne dvospinske interakcije, koji stoji u vezi sa kritičnim indeksom ν prema relaciji

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\ . \tag{3.34}$$

Na taj način, linearizacijom rekurentne relacije (3.9) posebno u svakoj od fiksnih tačaka odredjujemo kritični indeks ν [2], što, zajedno sa relacijom (3.20) omogućava nalaženje svih kritičnih indeksa izotropnog kompresibilnog sistema. Mi ćemo ovu analizu sprovesti nešto generalnije [4], posmatrajući i malu spinsku anizotropiju istovremeno. S tom namerom ćemo radije linearizovati opštu rekurentnu relaciju (3.5) nego (3.9), smatrajući pri tom spinsku anizotropiju malom perturbacijom u izotropnim fiksnim tačkama.

Pretpostavka malosti spinske anizotropije dozvoljava

$$r^i = r^* + \Delta r^i \tag{3.35}$$

gde je r^* - fiksna vrednost parametra r u izotropnoj fiksnoj tački $(u^*, \hat{u}^*)$, a Δr^i je malo otstupanje od izotropne fiksne vrednosti, koje takodje uslovljava malu promenu propagatora $\Gamma^{ij}(\vec{p};r^i)\delta_{ij}$ u (3.1), tj.

$$\Delta\Gamma^{ij}(\vec{p}) = \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial r_\ell} (\Gamma^{ij}(\vec{p}) \cdot \Delta r_\ell \tag{3.36}$$

odnosno, s obzirom na (3.1) imamo

$$\int_{\vec{p}}^{>} \Delta\Gamma^{ij}(\vec{p},r^i) = -\Delta r^i \delta_{ij} \left\{ \int_{\vec{p}}^{>} \frac{1}{(\vec{p}^2+r^i)^2}\bigg|_{r^i=0} - 2r^* \int_{\vec{p}}^{>} \frac{1}{(p^2+r^*)^3} \right\} \tag{3.37}$$

gde drugi integral u zagradi egzaktno otpada zbog "mas-renormalizacionih" članova, a prvi je upravo A(0). Na ovaj način iz (3.5) dobijamo sledeću linearizovanu relaciju

$$(\Delta r^i)' = b^{2-\eta}\left\{1-8u^*\pi(0)+32(n+6)(u^*)^2D(0)\right\}\cdot\Delta r^i +$$
$$+ b^{2-\eta}\left\{-4(u^*+\hat{u}^*)\pi(0)+64(u^*)^2D(0)\right\}\sum_{\ell}\Delta r^{\ell} \tag{3.38}$$

gde je η kritični eksponent u izotropnoj fiksnoj tački, dat relacijom (3.20). Relaciju (3.38) možemo prepisatu u obliku [4]

$$(\Delta r^i)' = b^{\lambda_\Delta}\Delta r_i + \frac{1}{n}(b^{\lambda} - b^{\lambda_\Delta})\sum_{\ell}\Delta r^{\ell} \tag{3.39}$$

koja predstavlja kraći zapis dijagonalnog oblika n rekurentnih relacija za Δr^i, i = 1,2,...n. U (3.39) λ_Δ i λ su dve svojstvene vrednosti odgovarajuće matrice: λ je izotropna svojstvena

vrednost sa svojstvenim vektorom $\Delta r^1 = \Delta r^2 = \ldots = \Delta r^n$ u prostoru parametara, koji bismo dobili linearizacijom (3.9), i odgovara temperaturskoj nestabilnosti sistema preko (3.34); λ_Δ je (n-1)-puta degenerisana svojstvena vrednost koja pripada operatoru dvospinske anizotropije. Odgovarajući svojstveni vektori zadovoljavaju relaciju

$$\sum_\ell \Delta r^\ell = 0 \tag{3.40}$$

tj. operatori dvospinske anizotropije su ortogonalni na izotropnu izmensku interakciju [37] u prostoru svojstvenih vektora matrice transformacija (3.39). Primeri ovakvih operatora su dati napr. u ref. [37]. Mi ćemo se baviti operatorima spinske anizotropije koji su bitni za naš problem u sledećem odeljku. Na ovom mestu nas zanimaju samo dobijene svojstvene vrednosti.

Iz jednačine (3.38) na osnovu oblika (3.39), i iz (3.20) stavljajući odgovarajuće vrednosti parametara koji definišu jednu od fiksnih tačaka hamiltonijana, neposredno nalazimo skejling eksponente λ i λ_Δ. U fiksnim tačkama (3.15), (3.16), (3.17) i (3.18) oni iznose

$$\lambda_\Delta{}^G = \lambda^G = 2 \tag{3.41}$$

$$\lambda_\Delta{}^I = 2 \,, \quad \lambda^I = 2 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{3.42}$$

$$\lambda_\Delta{}^H = 2 - \frac{2\varepsilon}{n+8} + \frac{n^2-18n-88}{2(n+8)^3}\,\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{3.43a}$$

$$\lambda^H = 2\Big(1 - \frac{n+2}{2(n+8)}\,\varepsilon - \frac{(n+2)(13n+44)}{4(n+8)^3}\,\varepsilon^2\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{3.43b}$$

$$\lambda_{\Delta}^{C} = \lambda_{\Delta}^{H} \tag{3.44a}$$

$$\lambda^{C} = 2 - \frac{6\varepsilon}{n+8} + \frac{(n+2)(13n+44)}{2(n+8)^{3}}\varepsilon^{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3}) , \tag{3.44b}$$

respektivno.

3.2. Kritični indeksi izotropnog kompresibilnog modela. Krosover eksponent ϕ_{Δ}

Iz relacija za skejling eksponente izotropne i anizotropne dvospinske interakcije, koje smo upravo našli u prethodnom odeljku, neposredno odredjujemo kritični indeks korelacione dužine ν prema relaciji (3.34) i krosover eksponent ϕ_{Δ} koji pripada operatoru spinske anizotropije, prema relaciji [2]

$$\phi_{\Delta} = \frac{\lambda_{\Delta}}{\lambda} . \tag{3.45}$$

Prema (3.34) i (3.45) dobijamo napr. u Gaussovoj fiksnoj tački (3.15) iz (3.41) da je

$$\nu^{G} = \frac{1}{2} , \quad \phi_{\Delta}^{G} = 1 \tag{3.46}$$

odnosno u Ising-ovoj fiksnoj tački (3.16) iz (3.42)

$$\nu^{I} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^{2}}{4}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3}) \tag{3.47}$$

i

$$\phi_{\Delta}^{I} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^{2}}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3}) . \tag{3.48}$$

Slično u Heisenberg-ovoj fiksnoj tački (3.17) koristeći nadjeni izraz (3.43b)

$$\nu^{H} = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\varepsilon + \frac{(n+2)(n^{2}+23n+60)}{8(n+8)^{3}}\varepsilon^{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3}) \tag{3.49}$$

Na osnovu

$$\alpha = 2 - d\nu \qquad (3.53)$$

gde je $d = 4-\varepsilon$, ν - dato sa (3.49) nalazimo kritični indeks specifične toplote u Heisenbergovoj fiksnoj tački:

$$\alpha^H = \frac{4-n}{2(n+8)}\varepsilon - \frac{(n+2)(n^2+30n+56)}{4(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) . \qquad (3.54)$$

Primetimo da je $\alpha^H > 0$ za $n < 4-4\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. S druge strane, ovo je oblast nestabilnosti Heisenbergove fiksne tačke u odnosu na $\hat{u}$-perturbaciju u polaznom hamiltonijanu (1.20). Tako, metod RNG predvidja krosover iz Heisenbergove u "constrained" fiksnu tačku (3.18), koja je u ovoj oblasti potpuno stabilna u odnosu na izotropne perturbacije. Ovaj prelaz iz kritičnog ponašanja koje bi odgovaralo krutom Heisenbergovom modelu (sa kritičnim indeksima ν^H, η^H, α^H datim sa (3.49), (3.52) i (3.54) i krosover eksponentom ϕ_Δ^H (3.50)) u novi tip kritičnog ponašanja (videti niže) koji je asociran "constrained" fiksnoj tački (3.18), kontrolisan je jednim krosover eksponentom $\phi_{\hat{u}}$ koji je odredjen skejling eksponentom $\lambda_{\hat{u}}^H$ u Heisenbergovoj fiksnoj tački

$$\phi_{\hat{u}} = \frac{\lambda_{\hat{u}}^H}{\lambda^H} \qquad (3.55)$$

gde je $\lambda_{\hat{u}}^{\hat{u}}$ dato formulom (3.26b) a λ^H formulom (3.43b). Tako je

$$\phi_{\hat{u}} = \frac{4-n}{n+8}\varepsilon - \frac{(n+2)(13n+44)}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \qquad (3.56)$$

Na osnovu opštih razmatranja dimenzionalnosti operatora tipa $\hat{u}$-izotropnih perturbacija u (1.20), Sak [8] je sugerirao

relaciju koja povezuje krosover skponent $\phi_{\hat{u}}$ sa kritičnim indeksom specifične toplote

$$\phi_{\hat{u}} = \frac{\alpha}{\nu} \qquad (3.57)$$

gde je ν - kritični indeks korelacione dužine. Ova relacija ukazuje na postojanje krosover efekta samo onda kada je $\alpha>0$. To je slučaj (3.45) sa Heisenbergovom fiksnom tačkom, kada je broj spinskih komponenti n manji od 4. U ref. [8] relacija (3.57) je takodje pokazana računanjem odgovarajućih kritičnih indeksa u prvom redu ε-razvoja. Iz naših rezultata (3.49), (3.54) i (3.56) neposredno sledi da je relacija (3.57) korektna i u drugom redu ε-razvoja. Na ovaj način, stabilnost fiksne tačke "kratkodometne" interakcije (u našem slučaju hamiltonijan (1.20) u otsustvu zadnjeg člana, koji predstavlja dugodometnu interakciju) u odnosu na perturbacije dugog dometa indukovane kompresibilnošću modela je u direktnoj vezi sa znakom od α. Ovo je izgleda generalna karakteristika kompresibilnih modela [11,16,17].

Na potpuno isti način na koji smo odredili kritične indekse ν^H, $\phi_\Delta{}^H$, η^H i α^H u Heisenbergovoj fiksnoj tački (3.17) polazeći od relacija (3.43a i b) i (3.20), možemo naći kritičneć indekse u "constrained" fiksnoj tački (3.18), uzimajući relacije (3.44 a i b) i (3.20) kao polazne. Odgovarajući izrazi za kritične indekse nalaze se u tabeli 2b). Ovde ćemo se zadržati na jednoj drugoj karakteristici "contrained" fiksne tačke.

Uporedjujući izraze (3.44b) i (3.43b) nalazimo da važi relacija

$$\lambda^C = \lambda^H \, (1 - \alpha^H) \qquad (3.58)$$

gde je α^H dato formulom (3.54) kritični indeks specifične toplote u Heisenberg-ovoj fiksnoj tački (3.17). Značaj ove relacije ogleda se u činjenici da kritični indeksi u "constrained" fiksnoj tački (3.18) stoje u vezi sa odgovarajućim kritičnim indeksima u Heisenbergovoj fiksnoj tački (3.17) u relacijama koje predvidja Fisher-ova teorija renormalizacije kritičnih indeksa [13]. Odmah se vidi da, prema (3.34), relacija (3.58) daje

$$\nu^C = \frac{\nu^H}{1-\alpha^H} . \qquad (3.59)$$

S obzirom na relaciju (3.53) i sa ν^C iz (3.59) dobijamo

$$\alpha^C = - \frac{\alpha^H}{1-\alpha^H} \qquad (3.60)$$

i slične relacije za γ, β i δ. Ovo se ne odnosi na kritični indeks η, koji ostaje isti kao kod krutog Heisenbergovog modela (3.52).

Što se tiče krosover eksponenta ϕ_Δ^C on je takodje renormalizovan u Fisherovom smislu [13]. Naime relacija (3.44a) implicira, kroz (3.45) i (3.58)

$$\phi_\Delta^C = \frac{\phi_\Delta^H}{1-\alpha^H} . \qquad (3.61)$$

U slučaju malog broja spinskih komponenti ($n<4-4\varepsilon$) "constrained" fiksna tačka (3.18) sa renormalizovanim kritičnim indeksima kontroliše kritično ponašanje izotropnog kompresibilnog feromagneta. Ne može se unapred tvrditi da će relacije renormalizacije, koje smo pokazali u drugom redu po ε, važiti i u

višim redovima, zbog nekonvergentnosti ε-razvoja.

Ako je broj komponenti parametra uredjenja n veći od $4-4\varepsilon$, kompresibilan izotropni magnetik će pokazivati kritično ponašanje kao krut model sa istim brojem komponenti (Heisenberg-ova fiksna tačka i odgovarajući kritični indeksi). Renormalizacija indeksa tada nema mesta.

Prisustvo dvospinske anizotropije, medjutim, snižava simetriju sistema. U O(n)-simetričnim izotropnim fiksnim tačkama operator spinske anizotropije je relevantan ($\phi_\Delta>0$). Zbog toga izotropnim fiksnim tačkama u ovom slučaju korespondira ili kritična tačka višeg reda ili pak one opisuju neke krosover efekte u sistemu sa dvospinskom anizotropijom. Ovo pitanje ćemo još diskutovati u trećoj glavi, pošto se upoznamo sa još nekim efektima spinske anizotropije u kompresibilnom modelu.

4. Model sa dva spinska polja

Slučaj proizvoljno jake anizotropije zahteva poznavanje konkretnog oblika dvospinske anizotropije. Mi razmatramo sledeći oblik

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta, & i = 1,2,\ldots m, \quad m < n \\ -\Delta, & i = m+1,\ m+2,\ldots,n \end{cases} \tag{4.1}$$

koji ima mesta u magnetnim sistemima sa dve "lake" ose [20]. Na ovaj način, spinska anizotropija pravi razliku u interakcijama medju prvih m-komponenti spina i medju drugih (n-m)-

komponenti, uvodeći dva izmenska integrala u originalnoj dvospinskoj interakciji, odnosno dve spinske promenljive. Hamiltonijan sistema (1.7) tako postaje modelni hamiltonijan sa dva parametra uredjenja: m-komponentno spinsko polje $\vec{\sigma}(x)$, kao jedan parametar uredjenja, izmenski integral J_σ, i (n-m)-komponentno spinsko polje $\vec{S}(x)$ kao drugi, izmenski integral J_S. Oba spinska polja su kuplovana sa rešetkom (1.6), što daje dve konstante kuplovanja g_σ i g_S, gde je

$$g = g_o + \Delta , \qquad g_S = g_o - \Delta . \tag{4.2}$$

Efektivni spinski hamiltonijan (1.20) kao hamiltonijan sa dva kritična polja postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff.} = \int d^dx \Big\{ & r_\sigma \sigma^2(x) + \tfrac{1}{2}(\nabla\sigma(x))^2 + r_S S^2(x) + \tfrac{1}{2}(\nabla S(x))^2 + \\ & + \frac{u}{4}\sigma^4(x) + \frac{2w}{4}\sigma^2(x)S^2(x) + \frac{v}{4}S^4(x) \Big\} + \\ & + \frac{\hat{u}}{\Omega}\Big(\int d^dx\sigma^2(x)\Big)^2 + \frac{2\hat{w}}{\Omega}\Big(\int d^dx\sigma^2(x)\Big)\Big(\int d^dxS^2(x)\Big) + \\ & + \frac{\hat{v}}{\Omega}\Big(\int d^dxS^2(x)\Big)^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

prepisan pomoću inverznog Furije-transforma spinskih polja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$. U (4.3) r_σ i r_S su dvospinske konstante kuplovanja date sa (1.14) gde je Δ^i dato sa (4.1); u-(v-) je izotropna 4-spinska interakcija m-komponentnog ((n-m)-komponentnog) polja $\vec{\sigma}(x)$ ($(\vec{S}(x))$), a član sa interakcionom konstantom w je kratkodometna 4-spinska interakcija izmedju $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$ polja. Slično, $\hat{u}$-($\hat{v}$-) je dugodometna izotropna interakcija $\vec{\sigma}(x)$ ($\vec{S}(x)$)

polja sa $\hat{u}(\hat{v})$ interakcionim konstantama a $\hat{w}$-interakcija je dugodometna interakcija izmedju različitih polja. Interakcione konstante $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$ su date sledećim izrazima:

$$\hat{u} = \frac{2g_{\sigma}^{2}}{c_{11}} \tag{4.4}$$

$$\hat{v} = \frac{2g_{S}^{2}}{c_{11}} \tag{4.5}$$

$$\hat{w} = \frac{2g_{\sigma}g_{S}}{c_{11}} \tag{4.6}$$

a u, v i w su promenjeni (videti 1.21 i 1.22) interakcioni parametri krutog modela sa dva polja

$$u = u_{o} - \hat{u} \tag{4.7}$$

$$v = v_{o} - \hat{v} \tag{4.8}$$

$$w = w_{o} - \hat{w} \;. \tag{4.9}$$

Radi pogodnosti, svi 4-spinski interakcioni parametri u (4.3) su podeljeni sa 4 (konvencija!). Konstante u_o, v_o i w_o potiču iz weighting faktora koji odgovara modelu dva polja.

Bez zadnjih tri člana u (4.3) koji predstavljaju indukovanu dugodometnu interakciju, preostali deo hamiltonijana opisuje spinski anizotropan kruti model sa dvospinskom i četvorospinskom anizotropijom. Potpuni hamiltonijan (4.3) je izotropan u odnosu $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$ varijable i elastične osobine rešetke, respektivno. Medjutim, kako su prisutna dva polja, (4.3) više nije kompatibilan sa egzistencijom samo jedne dužine skale i on zahteva specijalan tretman [18,40,43] u okviru metoda RNG.

Primetimo da iz formula (4.4-6) sledi da interakcioni parametri indukovanih 4-spinskih interakcija nisu medjusobno nezavisni. Naime, važi relacija $\hat{u}\hat{v} = \hat{w}^2$, o kojoj treba voditi računa u daljoj analizi modela. Kako je jedna od namena ovog rada demonstracija metoda RNG, mi ćemo u ovoj glavi analizirati opšti slučaj modela sa dva kritična polja. Posledice medjusobne zavisnosti interakcionih parametara biće date u trećoj glavi.

4.1. Rekurentne relacije i fiksne tačke modela sa dva kritična polja

Polazimo od efektivnog hamiltonijana sa dva spinska polja (4.3) i tražimo skup rekurentnih relacija za interakcione parametre r_σ, r_S, u, v, w, $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$. U ovom odeljku ćemo se zadržati u oblasti prostora parametara gde su fiksne vrednosti interakcionih parametara reda ε, kao u slučaju izotropnog modela (videti rekurentne relacije niže). Fizički, ovim izražavamo činjenicu da u takvim fiksnim tačkama oba spinska polja imaju kritične fluktuacije [44].

Rekurentne relacije koje reprezentuju transformacije RNG na hamiltonijanu (4.3) nalazimo pomoću tehnike Feynmanovih dijagrama. Perturbacioni članovi su svih šest četvorospinskih interakcija u (4.3), koje su na dijagramima niže predstavljene sledećim simbolima:

X - odgovara Furije-transformu od $\frac{u}{4}\int d^d x \sigma^4(x)$, tj. prave spoljašnje linije su $\sigma^i_{\vec{q}}$ varijable, $i = 1,2,\ldots m$, a njihovom preseku odgovara interakciona konstanta $\frac{u}{4}$, gde je u dato sa (4.7);

\- vitičaste linije predstavljaju $S_{\vec{q}}^{i}$, a presek interakcionu konstantu $\frac{v}{4}$, gde je v iz (4.8);

\- preseku vitičastih i pravih linija odgovara interakcionom parametru $\frac{w}{2}$, gde je w iz (4.9);

Slično, interakcionoj konstanti $\frac{\hat{u}}{\Omega}$ (4.4) pridružujemo duplu isprekidanu liniju u preseku pravih spoljašnjih linija koje predstavljaju $\sigma_{\vec{q}}^{i}$ - varijable, sl. 5a). Dupla isprekidana linija nosi nulti impuls, kao i u izotropnom slučaju; interakcionom parametru $\frac{2\hat{w}}{\Omega}$ odgovara dupla isprekidana linija u preseku dve vitičaste i dve prave linije, pri čemu je očigledno da one moraju stajati kao na sl. 5b) a ne kao na sl. 5c), dok dupla isprekidana linija izmedju četiri vitičaste linije nosi interakcioni parametar $\frac{\hat{v}}{\Omega}$, sl. 5d) gde je v dato relacijom (4.5). Još



sl. 5.

jedna bitna napomena za čitanje dijagrama: model sa dva spinska polja (4.3), odnosno njegov Furije-lik, sadrži dve dvospinske interakcije tipa (2.12), naime jednu sa $\sigma_{\vec{q}}^{i}$ - i jednu sa $S_{\vec{q}}^{i}$ - varijablama. Na taj način se pojavljuju dve izotropne korelacione funkcije

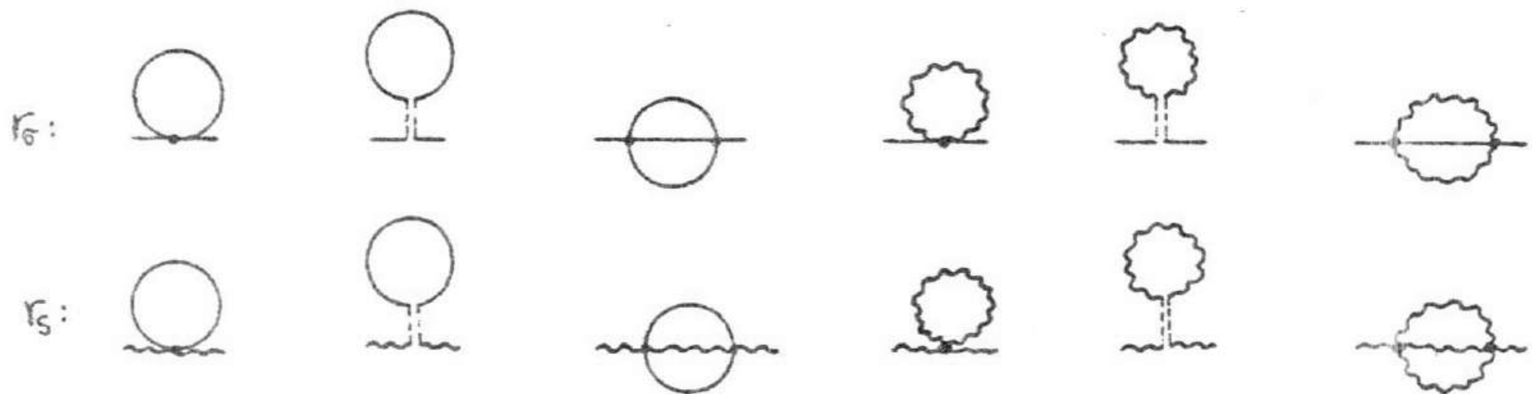
$$\Gamma_{\sigma}^{ij}(\vec{p}) = \frac{1}{r_{\sigma}+p^2}\,\delta_{ij} \tag{4.10}$$

za $\sigma_{\vec{q}}^{i}$ - varijable, i = 1,2,...m; i slično

$$\Gamma_S^{ij}(\vec{p}) = \frac{1}{r_S+p^2}\,\delta_{ij} \qquad (4.11)$$

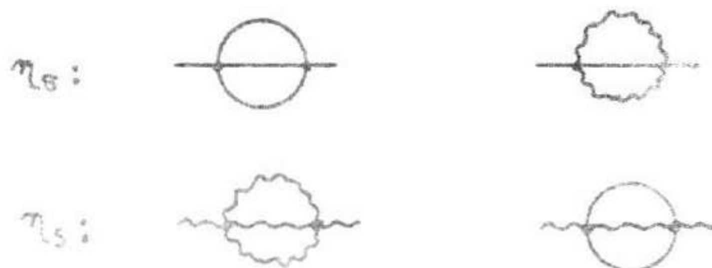
za $S_{\vec{q}}^{i}$ varijable, $i = 1,2,\dots,n-m$. Kontrakcije pravih linija na dijagramima odgovaraju propagatorskoj funkciji (4.10), a kontrakcije vitičastih linija - propagatoru (4.11). Adekvatno, sumiranje po spinskim indeksima u zatvorenim petljama punih linija ide do m, a sumiranje po zatvorenim petljama vitičastih linija - do (n-m).

Dijagrami koji daju doprinose rekurentnim relacijama za dvospinske interakcione parametre r_σ i r_S, zaključno sa drugim redom, su dati na sl.6). Medju dijagramima koji doprinose dvospinskoj interakciji nalaze se i oni koji odredjuju kritični



sl. 6.

indeks korelacione funkcije η, kao što smo objasnili u prvoj glavi. Prisustvo dve dvospinske interakcije za naš slučaj spinske anizotropije, daje dva kritična indeksa: η_σ i η_S, koji su odredjeni sledećim dijagramima drugog reda:



sl. 7.

Dijagrami na sl.6) daju sledeće rekurentne relacije za dvospinske interakcione parametre:

$$r_\sigma' = b^{2-\eta_\sigma}\Big\{ r_\sigma + (m+2)u\cdot A(r_\sigma) + m\hat{u}\cdot A(r_\sigma) + (n-m)w\cdot A(r_S) +$$

$$+ (n-m)\hat{w}.A(r_S) - 2(m+2)u^2 D(r_\sigma, r_\sigma, r_\sigma) - 2(n-m)w^2 D(r_\sigma, r_S, r_S)\Big\} \quad (4.12)$$

$$r_S' = b^{2-\eta_S}\Big\{ r_S + (n-m+2)v\cdot A(r_S) + (n-m)\hat{v}.A(r_S) + m(w+\hat{w})\cdot A(r_\sigma) -$$

$$-2(n-m+2)v^2 D(r_S, r_S, r_S) - 2mw^2 D(r_S, r_\sigma, r_\sigma)\Big\} \quad (4.13)$$

gde je $A(r_\sigma)$ ili $A(r_S)$ poznati integral iz diskusije o izotropnom modelu, a $D(r_S, r_\sigma, r_\sigma)$ sledeći integral

$$D(r_S, r_\sigma, r_\sigma) = \iint\limits_{\frac{1}{b}<|\vec{p}_i|<1,\, i=1,2} \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d}\frac{d^d p_2}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{p_1^2 + r_S}\cdot\frac{1}{p_2^2 + r_\sigma}\cdot\frac{1}{(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2 + r_\sigma} \quad (4.14)$$

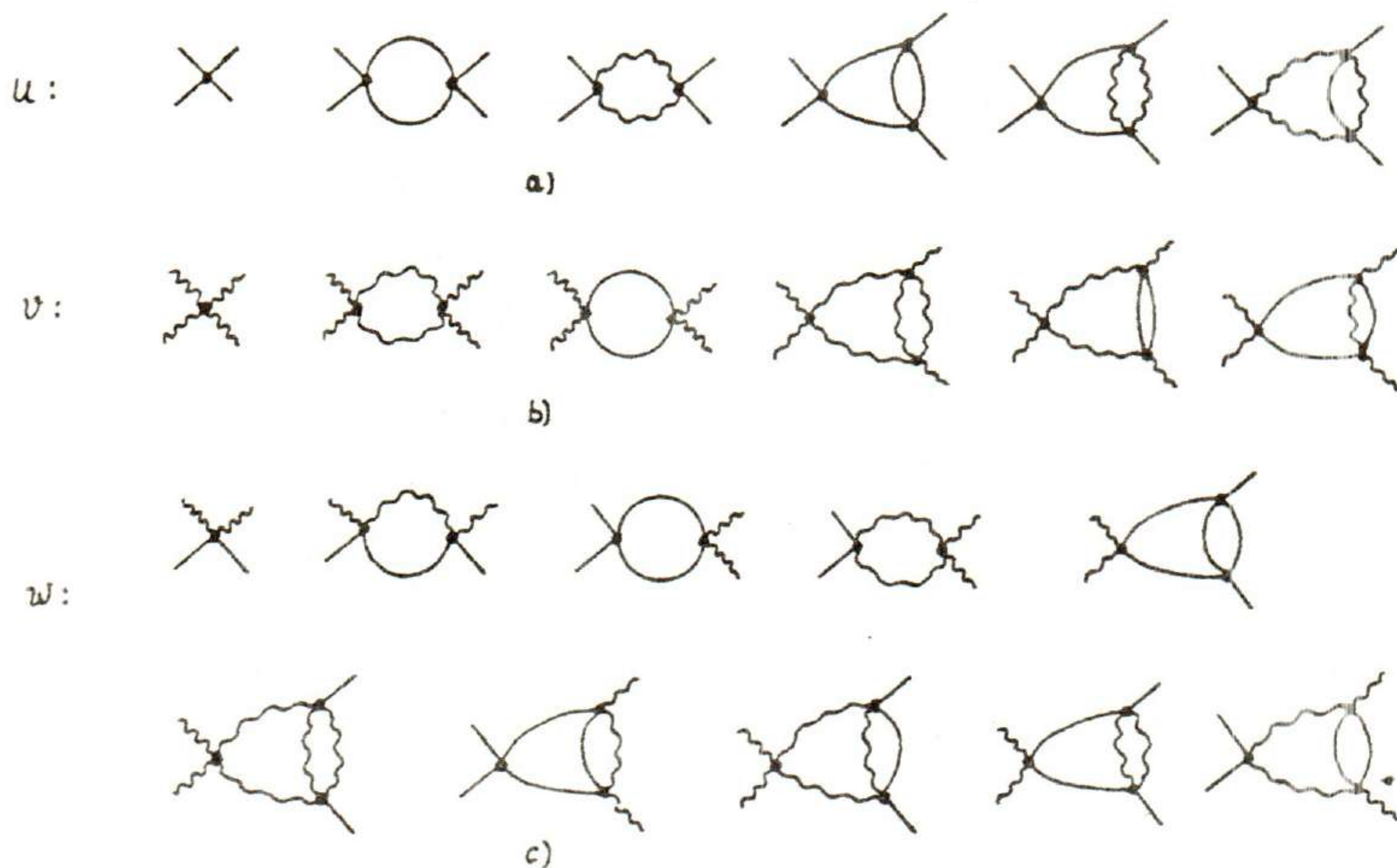
za malo r_S i r_σ ovo je uobičajeni integral D (videti tabelu 1.). U (4.12) i (4.13) η_σ i η_S su kritični indeksi dveju korelacionih funkcija (4.10) i (4.11), izračunati iz dijagrama na sl. 7) iznose:

$$\eta_\sigma = \frac{\hat{C}_4^{\,2}}{2}\left[(m+2)u^2 + (n-m)w^2\right] \quad (4.15)$$

i

$$\eta_S = \frac{\hat{C}_4^{\,2}}{2}\left[(n-m+2)v^2 + mw^2\right]. \quad (4.16)$$

Dijagrami koji doprinose rekurentnim relacijama za četvorospinske interakcione parametre u, v, w, $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$ dati su na sl. 8) i 9)



Sl. 8.

Odgovarajuće rekurentne relacije za u, v i w su:

$$u' = b^{\varepsilon-2\eta_\sigma}\Big\{u-(m+8)u^2\pi(r_\sigma,r_\sigma)-(n-m)w^2\pi(r_S,r_S)+4(5m+22)u^3\cdot$$
$$\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_\sigma)+12(n-m)uw^2B(r_\sigma;r_S,r_S)+8(n-m)w^3\cdot B(r_S;r_S,r_\sigma)\Big\} \tag{4.17}$$

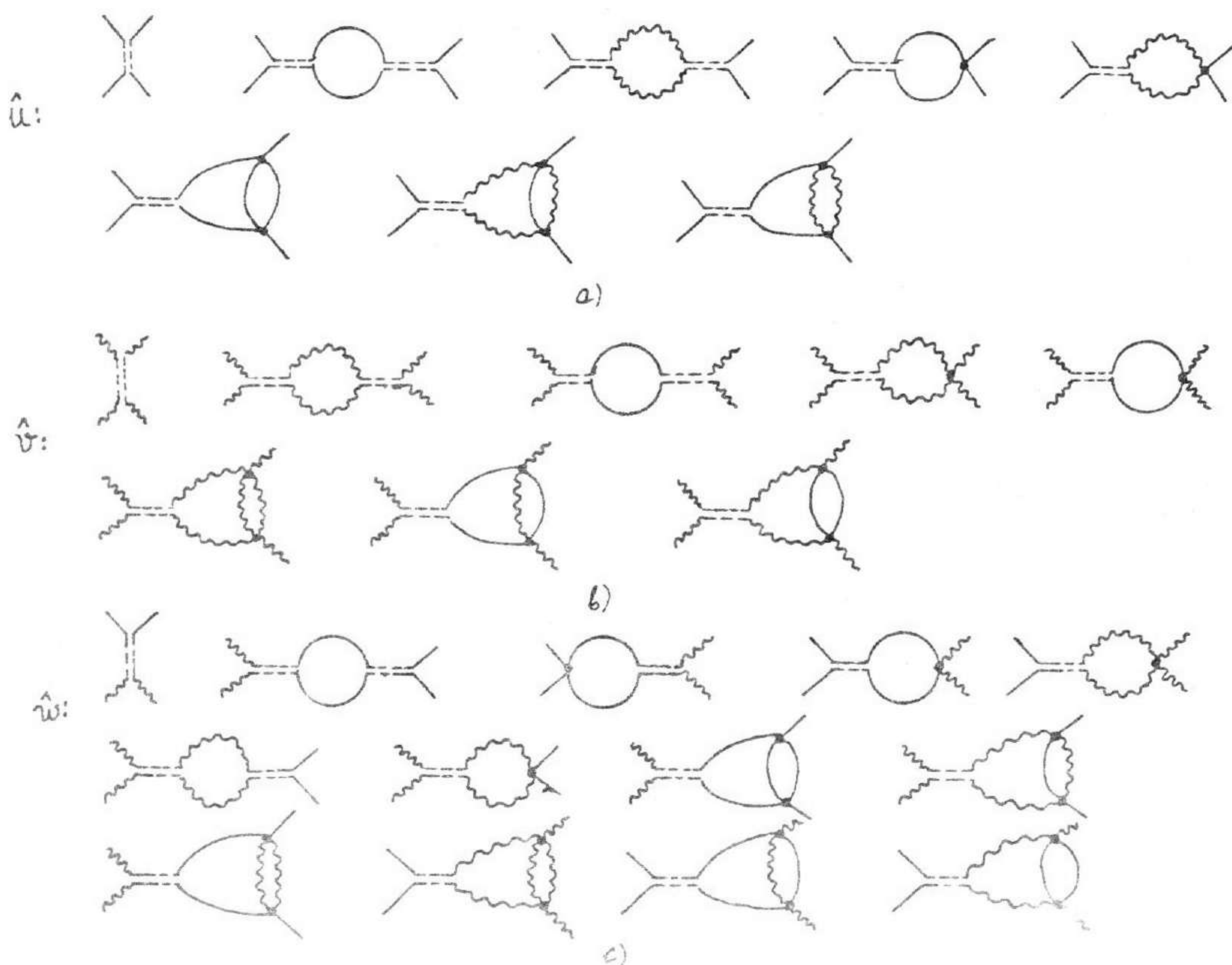
$$v'=b^{\varepsilon-2\eta_S}\Big\{v-(n-m+8)v^2\pi(r_S,r_S)-mw^2\pi(r_\sigma,r_\sigma)+4\big[5(n-m)+22\big]v^3\cdot$$
$$\cdot B(r_S;r_S,r_S)+12mvw^2\cdot B(r_S;r_\sigma,r_\sigma)+8mw^3\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_S)\Big\} \tag{4.18}$$

$$w'=b^{\varepsilon-\eta_\sigma-\eta_S}\Big\{w-4w^2\pi(r_\sigma,r_S)-(m+2)uw\pi(r_\sigma,r_\sigma)-(n-m+2)wv\pi(r_S,r_S)$$

$$+6(m+2)wu^2\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_\sigma)+6(n-m+2)wv^2\cdot B(r_S;r_S,r_S)+12(m+2)uw^2\cdot$$

$$\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_S)+12(n-m+2)vw^2\cdot B(r_S;r_S,r_\sigma)+2(n+8)w^3\cdot B(0;0,0)\Big\}. \tag{4.19}$$

Slično, dijagrami sa sl. 9. a,b i c) daju doprinose rekurentnim relacijama interakcionih parametara $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$.



Sl. 9.

Rekurentne relacije računate prema dijagramima na sl. 9) su:

$$\hat{u}' = b^{\varepsilon-2\eta_\sigma}\Big\{\hat{u}-m\hat{u}^2\pi(r_\sigma,r_\sigma)-2(m+2)u\hat{u}\cdot\pi(r_\sigma,r_\sigma)-2(n-m)w\hat{w}\cdot$$

$$\cdot\pi(r_S,r_S)-n-m)\hat{w}^2\cdot\pi(r_S,r_S)+12(m+2)\hat{u}u^2\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_\sigma)+$$

$$+8(n-m)\hat{w}w^2\cdot B(r_S;r_S,r_\sigma)+4(n-m)\hat{u}w^2\cdot B(r_\sigma;r_S,r_\sigma)\Big\} \quad (4.20)$$

$$\hat{v}' = b^{\varepsilon-2\eta_S}\Big\{\hat{v}-(n-m)\hat{v}^2\pi(r_S,r_S)-2(n-m+2)v\hat{v}\cdot\pi(r_S,r_S)-$$

$$-2m\,w\hat{w}\cdot\pi(r_\sigma,r_\sigma)-m\hat{w}^2\cdot\pi(r_\sigma,r_\sigma)+12(n-m+2)\hat{v}v^2\cdot$$

$$\cdot B(r_S;r_S,r_S)+8m\hat{w}w^2\cdot B(r_\sigma;r_S,r_\sigma)+4mw^2\hat{v}\cdot B(r_S;r_\sigma,r_S)\Big\} \quad (4.21)$$

i

$$\hat{w}' = b^{\varepsilon-\eta_\sigma-\eta_S}\Big\{\hat{w}-\big[(n-m+2)v\hat{w}+(n-m)\hat{v}\hat{w}+(n-m)w\hat{v}\big]\cdot$$

$$\cdot\pi(r_S,r_S)-\big[(m+2)u\hat{w}+m\hat{u}\hat{w}+mw\hat{u}\big]\cdot\pi(r_\sigma,r_\sigma)+$$

$$+6(m+2)u^2\hat{w}\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_\sigma)+4(n-m)w^2\hat{v}\cdot B(r_S;r_S,r_\sigma)+$$

$$+2(n-m)\hat{w}w^2\cdot B(r_\sigma;r_S,r_S)+6(n-m+2)v^2\hat{w}\cdot B(r_S;r_S,r_S)+$$

$$+4m\hat{w}^2\hat{u}\cdot B(r_\sigma;r_\sigma,r_S)+2m\hat{w}w^2\cdot B(r_S;r_\sigma,r_\sigma)\Big\}. \quad (4.22)$$

U rekurentnim relacijama, $B(r_i;\ r_j,\ r_k)$ je integral tipa:

$$B(r_i;r_j,r_k)=\iint_{\vec{p}_1,\vec{p}_2}\frac{d^d p_1}{(2\pi)^d}\frac{d^d p_2}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_i+p_1^2)^2}\cdot\frac{1}{r_j+p_2^2}\cdot\frac{1}{r_k+(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2} \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{b}<|\vec{p}_1|<1,\ \frac{1}{b}<|\vec{p}_2|<1.$$

Pri dobijanju rekurentnih relacija za interakcione parametre ugradjene u hamiltonijanu (4.3) sa anizotropijom, odbacili smo dijagrame čiji doprinosi teže nuli u termodinamičkom limesu (videti dodatak A-1) kao i "mas-renormalizacione" dijagrame. Rekurentne relacije su izračunate do reda koji obezbedjuje korektnost rezultata u drugom redu ε-razvoja.

Primetimo da se, prema relacijama (4.17), (4.18) i (4.19) interakcioni parametri kratkodometne 4-spinske interakcije sa anizotropijom, transformišu izmedju sebe, nezavisno od dodatnih parametara $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$. Ovo dovodi do zaključka, da će fiksne tačke pomenutih triju rekurentnih relacija biti iste kao u krutom modelu sa dva kritična polja [42]. Ovaj model je analiziran u ref. [42] i moguće fiksne tačke su nadjene. Svaka od fiksnih vrednosti parametara u^*, v^* i w^*, koje definišu fiksne tačke krutog modela, zatim učestvuju u odredjivanju fiksnih tačaka kompresibilnog modela prema relacijama (4.20), (4.21) i (4.22).

Rekurentne relacije za interakcione parametre mogu da se napišu u diferencijalnoj formi, gde se diferencira po $\ell=\ell nb$ a zatim svaki $\ell=0$. Napr. rel. (4.17) u diferencijalnoj formi izgleda ovako:

$$\frac{du'}{d\ell} = (\varepsilon-2\eta_\sigma)u-(m+8)u^2 \cdot \frac{1}{(r_\sigma+1)^2} - (n-m)w^2 \cdot \frac{1}{(r_s+1)^2} + $$
$$+ 4\cdot(5m+22)u^3 \cdot \frac{1}{(r_\sigma+1)^4} + 12(n-m)uw^2 \frac{1}{(r_\sigma+1)^2(r_s+1)^2} +$$
$$+8(n-m)w^2 \cdot \frac{1}{(r_s+1)^3(r_\sigma+1)} . \qquad (4.24)$$

Diferencijalni oblik svih rekurentnih relacija (4.17-22) nije

teško dobiti. Iz njih se fiksna tačka nalazi iz ovakvih uslova:

$$\frac{du'}{d\ell} = 0 \quad , \tag{4.25}$$

a u ranije navedenim oblicima, iz uslova

$$u' = u = u^*. \tag{4.26}$$

Medjutim, diferencijalni oblik rekurentnih relacija je instruktivniji u jednom drugom smislu. Naime, jednačine tipa (4.24) sa uslovima tipa (4.25) daju konačne fiksne vrednosti svih interakcionih parametara u^*, v^*, w^*, $\hat{u}^*$, $\hat{v}^*$ i $\hat{w}^*$ samo ako su i $r_\sigma{}^*$ i $r_S{}^*$ konačni. Inače, ovakve rekurentne relacije, formalno, daju i divergentne fiksne vrednosti nekih od interakcionih parametara kada je bar jedna od dvospinskih konstanti $r_\sigma{}^*$ ili $r_S{}^*$ beskonačna. Ovaj slučaj ćemo diskutovati u zadnjoj glavi.

Ovde ćemo se zadržati na slučaju kada su obe fiksne vrednosti interakcionih parametara reda ε, tj.

$$r_\sigma{}^* \sim \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad \text{i} \qquad r_S{}^* \sim \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.27}$$

što fizički odgovara egzistenciji oba polja $\vec{S}(x)$ i $\vec{\sigma}(x)$ kao polja sa kritičnim fluktuacijama [20]. U ovom slučaju procedura RNG je standardna za svako od kritičnih polja, tj. u rekurentnim relacijama (4.12-13) i (4.17-22) treba razviti podintegralne funkcije u red po r i zadržati samo prve članove, kao što smo diskutovali u prvoj glavi. Radi potpunosti, navedimo da tada rekurentna relacija, napr. (4.17) koju smo već pominjali, napisana u diferencijalnoj formi izgleda ovako:

$$\frac{du'}{d\ell} = (\varepsilon - 2\eta_\sigma)u - (m+8)u^2 \cdot \hat{C}_d - (n-m)w^2\hat{C}_d + 4(5m+22)u^3 \frac{\hat{C}_4^2}{2} +$$

$$+ 12(n-m)uw^2 \frac{\hat{C}_4^2}{2} + 8(n-m)w^3 \frac{\hat{C}_4^2}{2} \qquad (4.28)$$

gde je η_σ dato izrazom (4.15).

Pod uslovima (4.27), fiksne tačke rekurentnih relacija (4.17-22) nalazimo kao rešenja sistema odgovarajućih algebarskih jednačina. Zbog strukture tih jednačina, pogodno je prvo naći fiksne vrednosti u^*, v^* i w^* iz (4.17-19), koje predstavljaju fiksne tačke krutog modela sa anizotropijom.

4.1.1. Fiksne tačke krutog modela sa anizotropijom

Skup rekurentnih relacija (4.17), (4.18) i (4.19) ima šest fiksnih tačaka. Pored trivijalne fiksne tačke $u^*=w^*=v^*=0$, razlikovaćemo tzv. dekuplovane [42] fiksne tačke koje zadovoljavaju

$$w^* = 0 \qquad (4.29)$$

dok u^* i v^* mogu imati i nenulte vrednosti, i fiksne tačke za koje je $w^*=0$. Dekuplovane fiksne tačke su

$$u^* = u^{*H}(m), \quad w^* = 0, \quad v^* = 0 \qquad (4.30)$$

$$u^* = 0, \quad w^* = 0, \quad v^* = u^{*H}(n-m) \qquad (4.31)$$

i

$$u^* = u^{*H}(m), \quad w^* = 0, \quad v^* = u^{*H}(n-m) \qquad (4.32)$$

gde je

$$u^{*H}(m) = \frac{\bar{\varepsilon}}{(m+8)}\left(1 - \frac{3(3m+14)}{(m+8)^2}\,\varepsilon\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \qquad (4.33)$$

odnosno ista relacija za v^* sa $m \to n-m$. Ove fiksne tačke odgovaraju dvama dekuplovanim Heisenbergovim modelima sa m, odnosno (n-m)-komponentnim spinom i opisuju u suštini dva nezavisna mehanizma koji dovode do kritičnog ponašanja prvih m-, odnosno drugih (n-m)-spinskih komponenti originalnog modela. Ove fiksne tačke leže u ravni w=0 prostora parametara (u,v,w) i nestabilne su u odnosu na prisustvo w-interakcionog člana koji kupluje spinska polja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$ i teži da izvede hamiltonijan sistema iz ravni w=0. Oblast stabilnosti dekuplovanih fiksnih tačaka krutog modela je oblast velikih vrednosti ukupnog broja spinskih komponenti:

$$n > \frac{32+m^2}{m+2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (4.34)$$

(videti sl. 10). Pored navedenih fiksnih tačaka, rekurentne relacije (4.17-19) imaju još dve fiksne tačke. Jedno je n-izotropna Heisenbergova fiksna tačka

$$u^* = w^* = v^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{n+8}(1 + \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \qquad (4.35)$$

koja je, u kontekstu, kuplovana fiksna tačka. Stabilnost ove tačke u okviru kompresibilnog modela ćemo ispitivati nešto kasnije (odeljak 4.2). Na ovom mestu pomenimo samo to da je (4.35) kao fiksna tačka krutog modela stabilna za dovoljno malo n

$$n < 4 - 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \qquad (4.36)$$

Izmedju oblasti stabilnosti dekuplovanih fiksnih tačaka i Heisenbergove fiksne tačke (videti sliku 10) leži oblast stabilnosti tzv. bikonične fiksne tačke [42].

4.1.2. Fiksne tačke kompresibilnog modela sa anizotropijom

Fiksne tačke krutog modela sa anizotropijom, koje smo našli u 4.1.1. pojavljuju se kao "unconstained" fiksne tačke kompresibilnog modela (4.3), tj. kao tačke u kojima su

$$\hat{u}^* = \hat{v}^* = \hat{w}^* = 0\ . \tag{4.37}$$

Ovo je neposredne posledica strukture rekurentnih relacija (4.17-22). Pored ovih , kompletan skup rekurentnih relacija (4.17-22) ima i sledeće fiksne tačke:

$$\text{IC:}\quad \begin{aligned} & u^* = v^* = w^* = u^{*H} \\ & \hat{u}^* = \hat{v}^* = \hat{w}^* = \hat{u}^{*C} \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\text{AC:}\quad \begin{aligned} & u^* = v^* = w^* = u^{*H} \\ & \hat{u}^* \neq \hat{v}^* \neq \hat{w}^*\ ,\quad \hat{u}^*,\ \hat{v}^*,\ \hat{w}^* \neq 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

D: dekuplovane fiksne tačke

$$\begin{aligned} & u^* \neq 0, \quad w^* = 0, \quad v^* \neq 0 \\ & \hat{u}^* \neq 0, \quad \hat{w}^* = 0, \quad \hat{v}^* \neq 0\ . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Fiksna tačka IC se takodje pojavljuje u spinski izotropnom modelu (videti: (3.18)) - fiksne vrednosti interakcionih parametara iz modela sa dva polja su jednake i zavise od ukupnog broja spinskih komponenti. Ovu tačku ćemo zvati izotropna "constained" fiksna tačka, za razliku od (4.39) koja je isključivo karakteristika prisustva izmenske anizotropije u kompresibilnom modelu - anizotropna "constained" fiksna tačka.

Dekuplovane fiksne tačke karakterišu nezavisna kritična ponašanja dvaju izotropnih kompresibilnih modela sa parametrima uredjenja m-komponentnim $(\vec{\sigma}(x))$ odnosno (n-m)-komponentnim $(\vec{S}(x))$ parametrima uredjenja. Kao što ćemo videti u narednom paragrafu, oblast stabilnosti dekuplovanih fiksnih tačaka je oblast velikog ukupnog broja spinskih komponenti originalnog modela (sl. 10). Broj dekuplovanih fiksnih tačaka u našem modelu je veliki (videti tabelu 3.).

Fiksne vrednosti interakcionih parametara u^*, v^*, w^*, $\hat{u}^*$, $\hat{v}^*$ i $\hat{w}^*$ koje definišu lokaciju pojedinih fiksnih tačaka računate su zaključno sa korekcijama reda ε^2 i navedene su u sledećem paragrafu, gde ćemo ih neposredno koristiti (videti (4.71), (4.72) i (4.81)). Fiksne vrednosti dvospinskih interakcionih parametara $r_\sigma{}^*$ i $r_S{}^*$ su medjusobno jednake i iznose

$$\begin{aligned} &H: \quad r_\sigma{}^{*H} = r_S{}^{*H} = r_o{}^{*H} \\ &IC: \quad r_\sigma{}^{*C} = r_S{}^{*C} = r_o{}^{*C} \qquad (4.41) \\ &AC: \quad r_\sigma{}^{*A} = r_S{}^{*A} = r_o{}^{*H} \end{aligned}$$

gde su $r_o{}^{*H}$ i $r_o{}^{*C}$ odgovarajuće fiksne vrednosti izotropnog krutog, odnosno kompresibilnog modela, date sa (3.31) i (3.32), respektivno.

4.2. Skejling eksponenti i stabilnost fiksnih tačaka

Iz argumenata RNG, linearizacijom rekurentnih relacija (4.12-13), (4.17-22) u blizini jedne fiksne tačke, dobijaju se

informacije o njenoj stabilnosti. Preciznije, uslov stabilnosti zahteva da su skejling eksponenti svojstvenih operatora RNG negativni.

Skup limarizovanih rekurentnih relacija u blizini proizvoljne fiksne tačke $(r_\sigma{}^*,\ r_S{}^*;\ u^*, v^*, w^*;\ \hat{u}^*,\ \hat{v}^*,\ \hat{w}^*)$ je

$$(\Delta r_\sigma)' = \left[2-\eta_\sigma-(m+2)u^*\hat{C}_d-m\hat{u}^*\hat{C}_d+6(m+2)(u^*)^2\frac{\hat{C}_4{}^2}{2}+2(n-m)(w^*)^2\frac{\hat{C}_4{}^2}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot\ \Delta r_\sigma - \left[(n-m)(w^*+\hat{w}^*)\hat{C}_d-4(n-m)(w^*)^2\ \hat{C}_4{}^2\right]\cdot\Delta r_S \tag{4.42a}$$

$$(\Delta r_S)' = \left[2-\eta_S-(n-m+2)v^*\hat{C}_d-(n-m)\hat{v}^*\hat{C}_d+6(n-m+2)(v^*)^2\hat{C}_4^2+\right.$$

$$\left.+2m(w^*)^2\hat{C}_4^2\right]\Delta r_S - \left[m(w^*+\hat{w}^*)\hat{C}_d-4m(w^*)^2\hat{C}_4^2\right]\Delta r_\sigma \tag{4.42b}$$

odnosno za 4-spinske interakcione parametre

$$(\Delta u)' = \left[\varepsilon-3(m+2)(u^*)^2\ \hat{C}_4{}^2-(n-m)(w^*)^2\ \hat{C}_4{}^2-2(m+8)u^*\hat{C}_d+\right.$$

$$\left.+6(5m+22)(u^*)^2\ \hat{C}_4{}^2+6(n-m)(w^*)^2\ \hat{C}_4{}^2\right]\cdot\ \Delta u\quad -$$

$$-\left[2(n-m)u^*w^*\ \hat{C}_4{}^2+2(n-m)w^*\hat{C}_d-12(n-m)u^*w^*\hat{C}_4{}^2\ -\right.$$

$$\left.-\ 12(n-m)(w^*)^2\ \hat{C}_4{}^2\ \right]\cdot\ \Delta w \tag{4.43}$$

$$(\Delta v)' = -\left[2mw^*v^*\hat{C}_4{}^2+2mw^*\hat{C}_d-12mv^*w^*\hat{C}_4{}^2\ -\right.$$

$$\left.-\ 12m(w^*)^2\hat{C}_4{}^2\right]\cdot\Delta w+\left[\varepsilon-3(n-m+2)(v^*)^2\hat{C}_4{}^2\ -\right.$$

$$-\ m(w^*)^2\hat{C}_4{}^2-2(n-m+8)v^*\hat{C}_d+6(5(n-m)+22)(v^*)^2\hat{C}_4{}^2\ +$$

$$\left.+6m(w^*)^2\hat{C}_4^2\right]\ \Delta v \tag{4.44}$$

$$(\Delta w)' = -\Big[(m+2)u^*w^*\hat{C}_4^{\,2} + (m+2)w^*\hat{C}_d - 6(m+2)u^*w^*\hat{C}_4^{\,2} - 6(m+2)(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2}\Big]\times$$

$$\times\ \Delta u - \Big[(n-m+2)v^*w^*\hat{C}_4^{\,2} + (n-m+2)w^*\hat{C}_d - 6(n-m+2)\big((w^*)^2 + v^*w^*\big)\hat{C}_4^{\,2}\Big]\times$$

$$\times\ \Delta v + \Big[\varepsilon - \frac{1}{2}(m+2)(u^*)^2\hat{C}_4^{\,2} - \frac{1}{2}(n-m+2)(v^*)^2\hat{C}_4^{\,2} - 8w^*\hat{C}_d - (m+2)u^*\hat{C}_d -$$

$$-(n-m+2)v^*\hat{C}_d + 3(m+2)(u^*)^2\hat{C}_4^{\,2} + 3(n-m+2)(v^*)^2\hat{C}_4^{\,2} +$$

$$+12(m+2)u^*w^*\hat{C}_4^{\,2} + 12(n-m+2)v^*w^*\hat{C}_4^{\,2} + 3(n+8)(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2}\Big]\ \Delta w \qquad (4.45)$$

$$(\Delta\hat{u})' = -\Big[2(m+2)u^*\hat{u}^*\hat{C}_4^{\,2} + 2(m+2)\hat{u}^*\hat{C}_d - 12(m+2)u^*\hat{u}^*\hat{C}_4^{\,2}\Big]\cdot\Delta u\ -$$

$$-\Big[2(n-m)w^*\hat{u}^*\hat{C}_4^{\,2} + 2(n-m)\hat{w}^*\hat{C}_d - 8(n-m)\hat{w}^*w^*\hat{C}_4^{\,2}\ -$$

$$-\ 4(n-m)w^*\hat{u}^*\hat{C}_4^{\,2}\Big]\cdot\Delta w\ +$$

$$+\Big[\varepsilon - (m+2)(u^*)^2\hat{C}_4^{\,2} - (n-m)(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2} - 2m\hat{u}^*\hat{C}_d - 2(m+2)u^*\hat{C}_d\ +$$

$$+\ 6(m+2)(u^*)^2\hat{C}_4^{\,2} + 2(n-m)(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2}\Big]\cdot\Delta\hat{u}\ -$$

$$-\Big[2(n-m)w^*\hat{C}_d + 2(n-m)\hat{w}^*\hat{C}_d - 4(n-m)(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2}\Big]\cdot\Delta\hat{w} \qquad (4.46)$$

$$(\Delta\hat{v})' = -\Big[2(n-m+2)v^*\hat{v}^*\hat{C}_4^{\,2} + 2(n-m+2)\hat{v}^*\hat{C}_d - 12(n-m+2)v^*\hat{v}^*\hat{C}_4^{\,2}\Big]\times$$

$$\times\ \Delta v - \Big[2mw^*\hat{v}^*\hat{C}_4^{\,2} + 2m\hat{w}^*\hat{C}_d - 8mw^*\hat{w}^*\hat{C}_4^{\,2}\ -$$

$$-\ 4mw^*\hat{v}^*\hat{C}_4^{\,2}\Big]\cdot\ \Delta w - \Big[2m(w^* + \hat{w}^*)\hat{C}_d - 4m(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2}\Big]\Delta\hat{w}\ +$$

$$+\Big[\varepsilon - (n-m+2)(v^*)^2\hat{C}_4^{\,2} - m(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2} - 2(n-m)\hat{v}^*\hat{C}_d - 2(n-m+2)v^*\hat{C}_d\ +$$

$$+\ 6(n-m+2)(v^*)^2\hat{C}_4^{\,2} + 2m(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2}\Big]\cdot\ \Delta\hat{v} \qquad (4.47)$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta\hat{w})' = & -(m+2)\hat{w}^* \left[u^*\hat{C}_4^{\,2} + \hat{C}_d - 6u^*\hat{C}_4^{\,2} \right] \cdot \Delta u - \\
& - (n-m+2)\hat{w}^* \left[v^*\hat{C}_4^{\,2} + \hat{C}_d - 6v^*\hat{C}_4^{\,2} \right] \cdot \Delta v - \\
& - \Big[(n-m)\hat{v}^*\hat{C}_d + m\hat{u}^*\hat{C}_d + nw^*\hat{w}^*\hat{C}_4^{\,2} - 4(n-m)w^*\hat{v}^*\hat{C}_4^{\,2} - \\
& - 4mw^*\hat{u}^*\hat{C}_4^{\,2} - 2(n-m)w^*\hat{w}^*\hat{C}_4^{\,2} \Big] \cdot \Delta w - \\
& - \left[m(w^* + \hat{w}^*)\hat{C}_d - 2m(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2} \right] \cdot \Delta\hat{u} - \\
& - \left[(n-m)(w^* + \hat{w}^*)\hat{C}_d - 2(n-m)(w^*)^2\hat{C}_4^{\,2} \right] \cdot \Delta\hat{v} + \\
& + \Big[\varepsilon - \eta_\sigma - \eta_S - \hat{C}_d \left(m\hat{u}^* + (n-m)\hat{v}^* + (m+2)u^* + (n-m+2)v^* \right) + \\
& + \hat{C}_4^{\,2} \left(3(m+2)(u^*)^2 + 3(n-m+2)(v^*)^2 + n(w^*)^2 \right) \Big] \cdot \Delta\hat{w}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Skup linearizovanih rekurentnih relacija (4.42-48) odredjuje linearnu matricu transformacija RNG u obliku

$$
\begin{pmatrix} (\Delta r_\sigma)' \\ (\Delta r_S)' \\ (\Delta u)' \\ (\Delta v)' \\ (\Delta w)' \\ (\Delta\hat{u})' \\ (\Delta\hat{v})' \\ (\Delta\hat{w})' \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{c|c|c} R & O & O \\ \hline O & U & O \\ \hline O & (u\hat{u}) & \hat{U} \end{array} \right)
\begin{pmatrix} \Delta r_\sigma \\ \Delta r_S \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta\hat{u} \\ \Delta\hat{v} \\ \Delta\hat{w} \end{pmatrix}
\tag{4.49}
$$

koji dozvoljava nezavisnu dijagonalizaciju podmatrica R, U i Û. Tako se problem svodi na dijagonalizaciju jedne 2x2 matrice i

(3.35), dijagonalizacijom, dobijamo

$$\lambda^{H} = 2-\hat{C}_d\left[(m+2)+(n-m)\right]u^{*H} + 3(n+2)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2-\eta_\sigma^H\,, \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad (4.51a)$$

$$\lambda_\Delta^{H} = 2-\hat{C}_d\left[(m+2)-m\right]u^{*H} + \left[3(m+2)+(n-m)-2m\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2-\eta_S^H\,, \quad \begin{pmatrix}n-m\\-m\end{pmatrix} \qquad (4.51b)$$

što, sa tačnošću do reda ε^2, daje dve pomenute relacije (3.43b) i (3.43a). Odgovarajući svojstveni vektori su redom $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}n-m\\-m\end{pmatrix}$. Drugim rečima, prva svojstvena vrednost λ matrice R, odgovara izotropnom operatoru dvospinske interakcije i stoji u vezi sa kritičnim indeksom korelacione dužine ν , kao što smo diskutovali u 3.1). Druga svojstvena vrednost je skejling eksponent operatora spinske anizotropije u obliku

$$\mathscr{D} = \frac{\Delta}{2n}\int d^dx\left[(n-m)\sigma^2(x) - mS^2(x)\right] \qquad (4.52)$$

Očigledno je da ovakvih operatora ima n-1. Oni su svojstveni operatori linearnog operatora RNG koji odgovaraju svojstvenoj vrednosti (3.43a). Svojstvenoj vrednosti (3.43b) odgovara izotropni operator

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{2}\int d^dx(\sigma^2(x) + S^2(x))(r_o+q^2) \qquad (4.53)$$

tj. kao kod izotropnog modela sa n-komponentnim parametrom uredjenja. Ova kratka analiza o svojstvenim vrednostima i svojstvenim operatorima koji se dobijaju iz matrice R, je pre heuristička, nego što je bila neophodna [37]. Sa sličnim problemima ćemo se sresti kod anizotropne četvorospinske interakcije, gde

konstrukcija anizotropnih svojstvenih operatora nije tako očigledna.

Sledećih tri svojstvene vrednosti, koje ćemo obeležiti sa λ_1^H, λ_2^H i λ_3^H u Heisenbergovoj fiksnoj tački (3.35) i (3.37) dobićemo dijagonalizacijom matrice U^H iz (4.49). Ovi skejling eksponenti su ranije nadjeni u ref. [40], pošto oni treba da budu skejling eksponenti relevantnih operatora krutog modela sa anizotropijom, iz razloga koje smo ranije istakli. Ovde ćemo ih računati zajedno sa svojstvenim vektorima matrice U^H u datoj fiksnoj tački, i s tom merom, konstruisati te relevantne operatore, što nije uradjeno u ref. [40]. Još jedan razlog za ovo je da upotpunimo sliku skejling eksponenata našeg kompresibilnog modela, pošto se Heisenbergova fiksna tačka pojavljuje kao njegova n-izotropna "uncoustrained" fiksna tačka.

Iz linearizovanih rekurentnih relacija (4.43), (4.44) i (4.45) lako je videti da matrica U^H u Heisenbergovoj fiksnoj tački (3.35) i (3.37) glasi

$$\mathcal{U}^H = \begin{pmatrix} \varepsilon - 2(m+8)u^{*H}\hat{C}_d + (22m + 5n + 126)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & 0 & -2(n-m)u^{*H}(\hat{C}_d + 11u^{*H}\hat{C}_4^2) \\ 0 & \varepsilon - 2(n-m+8)u^{*H}\hat{C}_d + (27n - 22m + 126)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & -2m\,u^{*H}(\hat{C}_d - 11u^{*H}\hat{C}_4^2) \\ -(m+2)u^{*H}(\hat{C}_d - 11u^{*H}\hat{C}_4^2) & -(n-m+2)u^{*H}(\hat{C}_d - 11u^{*H}\hat{C}_4^2) & \varepsilon - (n+12)u^{*H}\hat{C}_d + (16n+82)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Matrica U^H ima sledeće svojstvene vrednosti i svojstvene vektore $\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{pmatrix}$ u Heisenbergovoj fiksnoj tački

$$\lambda_1^H = -\varepsilon + \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{4.54}$$

$$\lambda_2^H = \frac{n-4}{n+8}\varepsilon + \frac{5n^2+14n+152}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad \begin{pmatrix}(n-m)(n-m+2)\\ m(m+2)\\ -(m+2)(n-m+2)\end{pmatrix} \tag{4.55}$$

i

$$\lambda_3^H = -\frac{8\varepsilon}{n+8} + \frac{7n^2+68n+336}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad \begin{pmatrix}2(n-m)\\ -2m\\ n-2m\end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

Detalji ovog računa nalaze se u apendiksu (A-2). Prva svojstvena vrednost λ_1^H odgovara izotropnom 4-spinskom operatoru - 4-spinska kratkodometna perturbacija, kao u krutom Heisenbergovom modelu. U našoj notaciji (dva kritična polja), on glasi

$$\mathcal{H}_1 = \frac{u}{4}\int d^dx\, (\sigma^2(x) + s^2(x))^2 . \tag{4.57}$$

Heisenbergova fiksna tačka je uvek stabilna u odnosu na prisustvo ovakve perturbacije i predstavljala bi bikritičnu tačku krutog izotropnog Heisenbergovog modela [42]. Prisustvo anizotropne 4-spinske interakcije

$$\mathcal{D}_2 = (n-m+2)\frac{u}{4}\int d^dx \left[(n-m)\sigma^4(x) + ms^4(x)\right] -$$
$$- m(m+2)\frac{u}{2}\int d^dx\, \sigma^2(x)s^2(x) \tag{4.58}$$

sa skejling eksponentom λ_2^H (4.55) koji može biti pozitivan, ugrožava stabilnost ove fiksne tačke krutog modela. Oblast

stabilnosti Heisenbergove fiksne tačke, bar što se tiče anizotropne 4-spinske interakcije "kratkog dometa" dobija se iz uslova $\lambda_2^H < 0$ tj.

$$n < 4 - 2\varepsilon + o(\varepsilon^2) \ . \qquad (4.59)$$

Treća svojstvena vrednost matrice U^H, λ_3^H je negativna (4.56), tako da (4.59) ostaje jedini kriterijum stabilnosti u potprostoru parametara u, v, w, odnosno u oblasti koju predvidja relacija (4.59) Heisenbergova fiksna tačka opisuje bikritično ponašanje krutog Heisenbergovog modela sa 4-spinskom anizotropijom. Svojstveni operator $\mathcal{O}_3$

$$\mathcal{O}_3 = \frac{u}{4} \int d^dx \left[2(n-m)\sigma^4(x) - 2mS^4(x)\right] + (n-2m)\frac{u}{2} \int d^dx\sigma^2(x)S^2(x) \ , \qquad (4.60)$$

sa skejling eksponentom λ_3^H (4.56), je odgovoran [40] za krosover u oblast dekuplovanog kritičnog ponašanja dvaju spinskih polja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$. Kako je $\lambda_3^H < 0$ za svako n, u krutom modelu takav krosover ne egzistira. Kao što ćemo odmah videti, u kompresibilnom modelu to više nije slučaj.

Dijagonalizacija matrice $\hat{U}^H$ u Heisenbergovoj fiksnoj tački, (3.35) i (3.37), daće nam dalje informacije o stabilnosti ove fiksne tačke kompresibilnog modela. Novih tri skejling eksponenta, koje ćemo razlikovati po "kapi" od prethodna tri, tj. $\hat{\lambda}_1^H$, $\hat{\lambda}_2^H$ i $\hat{\lambda}_3^H$, su skejling eksponenti dugodometnih anizotropnih operatora, u Heisenbergovoj fiksnoj tački. Njih ćemo dobiti kao svojstvene vrednosti matrice $\hat{U}^H$, koju je lako formirati iz linearizovanih relacija (4.46), (4.47) i (4.48), i stavljajući $u^* = v^* = w^* = u^{*H}$, $\hat{u}^* = \hat{v}^* = \hat{w}^* = 0$, prema (3.35) i (3.37).

To je sledeća matrica:

$$\hat{\mathcal{U}}^{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon - 2(m+2)u^{*H}\hat{C}_d - [(n+2) - 6(m+2) - 2(n-m)](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & 0 & -2(n-m)u^{*H}(\hat{C}_d - 2u^{*H}\hat{C}_4^2) \\ 0 & \varepsilon - 2(n-m+2)u^{*H}\hat{C}_d - [(n+2) - 6(n-m+2) - 2m](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & -2mu^{*H}(\hat{C}_d - 2u^{*H}\hat{C}_4^2) \\ -mu^{*H}(\hat{C}_d - 2u^{*H}\hat{C}_4^2) & -(n-m)u^{*H}(\hat{C}_d - 2u^{*H}\hat{C}_4^2) & \varepsilon - [(m+2) + (n-m+2)]u^{*H}\hat{C}_d - [(n+2) - 3(n+4) - n](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

Dijagonalizacijom ove matrice postupkom koji je izložen u apendiksu nalazimo sledeće svojstvene vrednosti i svojstvene vektore $\begin{pmatrix} \Delta\hat{u} \\ \Delta\hat{v} \\ \Delta\hat{w} \end{pmatrix}$ u prostoru parametara:

$$\hat{\lambda}_1^{H} = \frac{4-n}{n+8}\,\varepsilon - \frac{13n^2+70n+88}{(n+8)^3}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

$$\hat{\lambda}_2^{H} = \frac{n+4}{n+8}\,\varepsilon + \frac{n^2-18n-88}{(n+8)^3}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad \begin{pmatrix} (n-m)^2 \\ m^2 \\ -m(n-m) \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

$$\hat{\lambda}_3^{H} = \frac{4\varepsilon}{n+8} - \frac{6n^2+44n+88}{(n+8)^3}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad \begin{pmatrix} 2(n-m) \\ -2m \\ n-2m \end{pmatrix}, \tag{4.64}$$

odnosno u prostoru operatora, odgovarajući svojstveni operatori RNG su $\hat{\mathcal{J}}_1$, $\hat{\mathcal{Q}}_2$ i $\hat{\mathcal{Q}}_3$, čiji su ovo skejling eksponenti. $\hat{\mathcal{J}}_1$ je izotropni operator dugodometne četvorospinske interakcije

$$\hat{\mathcal{J}}_1 = \frac{\hat{u}}{\ } \left(\int d^dx(\sigma^2(x) + S^2(x)) \right)^2 \qquad (4.65)$$

koji smo sreli kod izotropnog kompresibilnog modela, ovde prepisan preko već familijarne notacije dvaju polja. Odgovarajući skejling eksponent $\hat{\lambda}_1^H$ je upravo ranije računati $\lambda_{\hat{u}}^H$, dat formulom (3.26b). Kao što smo tamo istakli, kruti model je stabilan na izotropnu dugodometnu perturbaciju $\hat{\mathcal{J}}_1$ kadgod je $\hat{\lambda}_1^H < 0$, tj. za

$$n > 4 - 4\varepsilon + o(\varepsilon^2) \ . \qquad (4.66)$$

Dodatna dva skejling eksponenta data u (4.63) i (4.64) odgovaraju anizotropnim operatorima

$$\hat{\mathcal{Q}}_2 = \frac{\hat{u}}{\Omega} \left\{ \int d^dx \left[(n-m)\,\sigma^2(x) - mS^2(x) \right] \right\}^2 \qquad (4.67)$$

i

$$\hat{\mathcal{Q}}_3 = (n-m)\,\frac{\hat{u}}{2\Omega}\left(\int d^dx\sigma^2(x)\right)^2 - m\,\frac{\hat{u}}{\Omega}\left(\int d^dxS^2(x)\right)^2 + $$
$$+ \ (n-2m)\,\frac{\hat{u}}{\Omega}\left(\int d^dx\sigma^2(x)\right)\left(\int d^dxS^2(x)\right). \qquad (4.68)$$

Njihovi skejling eksponenti $\hat{\lambda}_2^H$ i $\hat{\lambda}_3^H$, kao što se vidi iz relacija (4.63-64) su uvek pozitivni. Na taj način, Heisenbergova fiksna tačka je nestabilna u odnosu na dugodometne anizotropne perturbacije, kako onda kada je stabilna na izotropne perturbacije indukovane kompresibilnošću ($n>4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2)$), tako i onda kada je stabilna u odnosu na kratkodometne anizotropne perturbacije ($n<4-2\varepsilon+o(\varepsilon^2)$). Prisustvo operatora sa skejling eksponentima većim od nule ($\mathcal{Q}_2$; $\hat{\mathcal{J}}_1$; $\hat{\mathcal{Q}}_2$, $\hat{\mathcal{Q}}_3$) iteracijama transformacija RNG udaljava hamiltonijan sistema od Heisenbergove fiksne

tačke. Na ovaj način smo odgovorili na prvi deo pitanja koje je postavljeno u uvodu: regularni fazni prelaz drugog reda kakav poseduje kruti model se menja usled prisustva kompresibilnosti i anizotropije. Ostaje još da vidimo u čemu se ogleda ta promena, odnosno prema kojim fiksnim tačkama teži hamiltonijan sistema.

Naša analiza za oblast malog broja komponenti parametra uredjenja, u okviru modela dva kritična polja, predvidja još jednu n-izotropnu fiksnu tačku

$$u^* = v^* = w^* = u^{*H} \tag{4.69}$$

$$\hat{u}^* = \hat{v}^* = \hat{w}^* = \hat{u}^{*C} \tag{4.70}$$

gde su u^{*H} i $\hat{u}^{*C}$ dati sledećim izrazima

$$u^{*H} = \frac{\bar{\varepsilon}}{n+8}\left(1 + \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\,\varepsilon\right) + o(\varepsilon^3) \tag{4.71}$$

$$\hat{u}^{*C} = \frac{\bar{\varepsilon}}{n(n+8)}\left(4-n - \frac{(n+2)(13n+44)}{(n+8)^2}\,\varepsilon\right) + o(\varepsilon^3). \tag{4.72}$$

Ovu fiksnu tačku modela sa dva kritična polja nazvali smo izotropna "constrained" fiksna tačka.

Stavljajući (4.69) i (4.70) u linearizovane rekurentne relacije (4.42-48) dobićemo, slično kao ranije, tri matrice R^C, U^C i $\hat{U}^C$. Odmah je jasno da je $U^C = U^H$, pa prema tome, skejling eksponenti $\lambda_1{}^C$, $\lambda_2{}^C$ i $\lambda_3{}^C$ odgovarajućih svojstvenih operatora ostaju isti kao u "unconstrained" Heisenbergovoj fiksnoj tački, tj. dati su relacijama (4.54-56).

Ostaje da se dijagonalizuju matrice R^C i $\hat{U}^C$ u izotropnoj "constrained" fiksnoj tački. Matrica R^C

$$
R^C = \begin{pmatrix}
2-(m+2)u^{*H}\hat{C}_4-m\hat{u}^{*C}\hat{C}_4 + & -(n-m)(u^{*H}+\hat{u}^{*C})\hat{C}_4 + \\
+\left[6(m+2)+(n-m)-\frac{1}{2}(n+2)\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & +2(n-m)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \\
 & \\
-m(u^{*H}+\hat{u}^{*C})\hat{C}_4 - & 2-(n-m+2)u^{*H}\hat{C}_4-(n-m)\hat{u}^{*C}\hat{C}_4 + \\
-2m(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & +\left[6(n-m+2)+m-\frac{1}{2}(n+2)\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2
\end{pmatrix}
\tag{4.73}
$$

gde su u^{*H} i $\hat{u}^{*C}$ dati u (4.71) i (4.72), daje dva skejling eksponenta, koje smo takodje ranije našli u odeljku 3.2). Dve svojstvene vrednosti su λ^C i $\lambda_\Delta{}^C$ date relacijama (3.44b i a). Odgovajući svojstveni vektori su isti kao u "unconstrained" fiksnoj tački, tj. skup svojstvenih dvospinskih operatora je isto kao u Heisenbergovoj tački: izotropna dvospinska interakcija - sa skejling eksponentom λ^C (3.44b) i operator dvospinske anizotropije $\mathcal{D}$ (4.52) - sa skejling eksponentom $\lambda_\Delta{}^C$ (3.44a).

Svojstvene vrednosti matrice $\hat{U}^C$ i IC fiksnoj tački (4.69-70), gde je $\hat{U}^C$ sledeća matrica

$$
\hat{U}^C = \begin{pmatrix}
\varepsilon-2m\hat{u}^{*C}\hat{C}_4-2(m+2)u^{*H}\hat{C}_4- & 0 & -2(n-m)(u^{*H}+\hat{u}^{*C})\hat{C}_4+ \\
-\left[(n+2)-6(m+2)-2(n-m)\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & & +4(n-m)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \\
 & & \\
0 & \varepsilon-2(n-m)\hat{u}^{*C}\hat{C}_4-2(n-m+2)u^{*H}\hat{C}_4- & -2m(u^{*H}+\hat{u}^{*C})\hat{C}_4+ \\
 & -\left[(n+2)-6(n-m+2)-2m\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & +4m(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \\
 & & \\
-m(u^{*H}+\hat{u}^{*C})\hat{C}_4+ & -(n-m)(u^{*H}+\hat{u}^{*C})\hat{C}_4+ & \varepsilon-\left[(n+4)u^{*H}+n\hat{u}^{*C}\right]\hat{C}_4 \\
+2m(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & +2(n-m)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & -\left[(n+2)-3(n+4)-n\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2
\end{pmatrix}
\tag{4.74}
$$

su sledeće:

$$\hat{\lambda}_1^C = \frac{n-4}{n+8}\,\varepsilon + \frac{13n^2+70n+88}{(n+8)^3}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \tag{4.75}$$

$$\hat{\lambda}_2^C = \hat{\lambda}_2^H \tag{4.76}$$

i

$$\hat{\lambda}_3^C = \frac{n}{n+8}\,\varepsilon\,\left(1 + \frac{7n+26}{(n+8)^2}\,\varepsilon\right) + o(\varepsilon^3) \tag{4.77}$$

sa istim svojstvenim vektorima kao u Heisenbergovoj fiksnoj tački (videti (4.62-64)). Tj. skup odgovarajućih svojstvenih operatora je $(\hat{\mathcal{J}}_1, \hat{\mathcal{D}}_2, \hat{\mathcal{D}}_3)$. (4.78)

Što se tiče izotropne dugodometne interakcije $\hat{\mathcal{J}}_1$, ona postaje irelevantan operator kada je zadovoljen uslov

$$\hat{\lambda}_1^C < 0 \tag{4.79}$$

što, u funkciji ukupnog broja spinskih komponenti može da se izrazi kao

$$n < 4 - 4\varepsilon + o(\varepsilon^2) \tag{4.80}$$

što odredjuje oblast stabilnosti IC fiksne tačke izotropnog modela, komplementarnu oblasti u kojoj je stabilna H fiksna tačka. Sa korekcijom reda ε, za $n = 4-4\varepsilon$ ove dve tačke se poklapaju. Prisustvo anizotropnih dugodometnih perturbacija $\hat{\mathcal{D}}_2$ i $\hat{\mathcal{D}}_3$ dovodi do nestabilnosti ovih fiksnih tačaka i egzistencije krosovera u neku drugu fiksnu tačku.

Anizotropna "constrained" fiksna tačka, čija je lokacija u prostoru interakcionih parametara data sledećim relacijama

$$u^* = v^* = w^* = u^{*H}$$

$$\hat{u}^* = \frac{n-m}{nm} \cdot \hat{\lambda}_2^{\,H}, \quad \hat{v}^* = \frac{m}{n(n-m)} \cdot \hat{\lambda}_2^{\,H}, \quad \hat{w}^* = -\frac{\hat{\lambda}_2^{\,H}}{n} \tag{4.81}$$

gde je $\hat{\lambda}_2^{\,H}$ dato sa (4.63), je osobitost kompresibilnog modela sa izmenskom anizotropijom i ne postoji njen analogan u izotropnom slučaju. Skup skejling eksponenata koji opisuju ponašanje relevantnih operatora $\mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{J}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \hat{\mathcal{J}}_1, \hat{\mathcal{D}}_2$ i $\hat{\mathcal{D}}_3$ u ovoj fiksnoj tački dobijamo dijagonalizacijom odgovarajućih matrica R^A, U^A i $\hat{U}^A$. Iz R^A

$$R^A = \begin{pmatrix} 2-(m+2)u^{*H}\hat{C}_d - m\hat{u}^{*A}\hat{C}_d + & -(n-m)\left(u^{*H}+\hat{w}^{*A}\right)\hat{C}_d + \\ +\left[6(m+2)+(n-m)-\frac{1}{2}(n+2)\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & +2(n-m)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \\ & \\ -m\left(u^{*H}+\hat{w}^{*A}\right)\hat{C}_d + & 2-(n-m+2)u^{*H}\hat{C}_d-(n-m)\hat{v}^{*A}\hat{C}_d + \\ +2m(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & +\left[6(n-m+2)+m-\frac{1}{2}(n+2)\right](u^{*H})^2\hat{C}_4^2 \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

gde su indeksom A obeležene fiksne vrednosti odgovarajućih parametara u (4.81), dobijamo skejling eksponent λ^A izotropnog operatora energije $\mathcal{J}$ i skejling eksponent λ_Δ^A operatora spinske anizotropije $\mathcal{D}$, koji su napred definisani (videti (4.53) i (4.52)). Neposredan račun daje

$$\lambda^A = \lambda^H \tag{4.83a}$$

i

$$\lambda_\Delta^A = 2 - \frac{n+6}{n+8}\,\varepsilon - \frac{n^2-18n-88}{2(n+8)^3}\,\varepsilon^2 \tag{4.83b}$$

gde je λ^H izotropni skejling eksponent dvospinske interakcije u Heisenbergovoj fiksnoj tački, dat izrazom (4.51a). Jednačina (4.83a) ukazuje na jednakost kritičnih indeksa $\nu, \gamma, \alpha, \ldots$ u

anizotropnoj "constrained" fiksnoj tački i Heisenbergovoj fiksnoj tački posmatranog modela. Medjutim, krosover eksponent u odnosu na spinsku anizotropiju ϕ_Δ^A izračunat iz (4.83b) je modifikovan u odnosu na ϕ_Δ^H i iznosi

$$\phi_\Delta^A = 1 - \frac{2\varepsilon}{n+8} + \frac{n^3+7n^2+30n+64}{2(n+8)^3}\varepsilon^2 . \tag{4.84}$$

Matrica $\hat{U}^A$ u anizotropnoj "constrained" fiksnoj tački (4.81) je

$$\hat{U}^A = \begin{pmatrix} \varepsilon-2m\hat{u}^{*A}\hat{C}_d-2(m+2)u^{*H}\hat{C}_d+O(u^{*H2}) & 0 & -2(n-m)(u^{*H}+\hat{w}^{*A})\hat{C}_d+O(u^{*H2}) \\ 0 & \varepsilon-2(n-m)\hat{v}^{*A}\hat{C}_d-2(n-m+2)u^{*H}\hat{C}_d+O(u^{*H^2}) & -2m(u^{*H}+\hat{w}^{*A})\hat{C}_d+O(u^{*H^2}) \\ -m(u^{*H}+\hat{w}^{*A})\hat{C}_d+O(u^{*H^2}) & -(n-m)(u^{*H}+\hat{w}^{*A})\hat{C}_d+O(u^{*H^2}) & \varepsilon-[(n+4)u^{*H}+m\hat{u}^{*A}+(n-m)\hat{v}^{*A}]\hat{C}_d+O(u^{*H^2}) \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

gde su članovi višeg reda izostavljeni, pošto su isti kao npr. u (4.74). Svojstvene vrednosti ove matrice daju skejling eksponente operatora $\hat{\mathcal{J}}_1$, $\hat{\mathcal{D}}_2$ i $\hat{\mathcal{D}}_3$ u anizotropnoj "constrained" fiksnoj tački. Oni su:

$$\hat{\lambda}_1^A = +\hat{\lambda}_1^H \tag{4.86}$$

$$\hat{\lambda}_2^A = -\hat{\lambda}_2^H \tag{4.87}$$

$$\hat{\lambda}_3^A = \hat{\lambda}_1^H - \hat{\lambda}_2^H = -\hat{\lambda}_3^C . \tag{4.88}$$

Negativnost skejling eksponenata $\hat{\lambda}_2^A$ i $\hat{\lambda}_3^A$ ukazuje na stabilnost

AC - fiksne tačke u odnosu na kompresibilnošću indukovane dugodometne perturbacije ($\hat{\mathcal{D}}_2$ i $\hat{\mathcal{D}}_3$). Medjutim, ona je nestabilna na izotropne perturbacije ($\hat{\mathcal{J}}_1$). Što se tiče 4-spinskih interakcija kratkog dometa, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{G}_2$ i $\mathcal{D}_3$ uslov stabilnosti ostaje isto kao kod Heisenbergove fiksne tačke, $n<4-2\varepsilon+o(\varepsilon^2)$. Dvospinska anizotropija je, medjutim, relevantan operator i u ovoj fiksnoj tački ($\phi_\Delta^A > 0$).

Dekuplovane fiksne tačke (videti tabelu 3.) bi odgovarale kritičnom ponašanju dvaju nezavisnih izotropnih modela sa parametrima uredjenja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$. Stoga analiza izotropnog modela sa n-komponentnim spinskim poljem, koju smo dali u odeljku 3.1), važi za oba kritična polja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$, uz zamenu $n\to m$, odnosno $n\to n-m$. Na osnovu rezultata iz 3.1. je jasno da je, prostoru interakcionih parametara $(u, \hat{u}; v, \hat{v})$, najstabilnija Heisenbergova fiksna tačka za oba modela: mH-(n-m)H, ako su ispunjeni uslovi

$$m > 4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2)$$

i

$$n-m > 4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2) \tag{4.89}$$

odnosno izotropna "constrained" fiksna tačka: mC-(n-m)C, pri

$$m < 4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2)$$

i

$$(n-m)<4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2) \; . \tag{4.90}$$

Medjutim, i ove fiksne tačke su osetljive na perturbacije koje kupluju dva polja (interakcione konstante w i $\hat{w}$) i oblast stabilnosti dekuplovanih tačaka je oblast gde ove perturbacije postaju irelevantne, tj.

$$\lambda_w < 0 \quad \text{i} \quad \lambda_{\hat{w}} < 0 \; . \tag{4.91}$$

U mH-(n-m)H fiksnoj tački λ_w se dobija kao treća svojstvena vrednost matrice

$$M^{mH-(n-m)H} = \begin{pmatrix} \varepsilon - 2(m+8)u^{*H}\hat{C}_d + 3[(m+2)+10m+44] \times (u^{*H})^2 \hat{C}_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon - 2(n-m+8)v^{*H}\hat{C}_d + 3[n-m+2+10n-10m+44](v^{*H})^2\hat{C}_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon - [(m+2)u^{*H} + (n-m+2)v^{*H}]\hat{C}_d - \frac{\hat{C}_4^2}{2}[(m+2)(u^{*H})^2 + (n-m+2)(v^{*H})^2] + 3\hat{C}_4^2[(m+2)(u^{*H})^2 + (n-m+2)(v^{*H})^2] \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

gde su $u^{*H} = u^{*H}(m)$, $v^{*H} = u^{*H}(n-m)$, $u^{*H}(k)$ je dato sa (4.71). Prve dve svojstvene vrednosti su upravo $\lambda_u^{mH-(n-m)H} = \lambda_1^H(m)$ i $\lambda_v^{mH-(n-m)H} = \lambda_1^H(n-m)$, $\lambda_1^H(k)$ je poznati izraz (4.54). Treća svojstvena vrednost iz (4.92) je

$$\lambda_w^{mH-(n-m)H} = \frac{m^2-mn-2n+32}{(m+8)(n-m+8)}\,\varepsilon - \frac{(m+2)(n-m+8)(13m+44)+(n-m+2)(m+8)(13n-13m+44)}{(m+8)^3(n-m+8)^3} \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \tag{4.93}$$

Negativnost izraza (4.93) daje uslov stabilnosti dekuplovanih fiksnih tačaka krutog modela sa anizotropijom, tj.

$$n > \frac{32+m^2}{m+2} + o(\varepsilon) \tag{4.94}$$

videti sl.10). Ispod krive h na slici 10.), interakcioni član $\frac{w}{2}\int d^dx\sigma^2(x)S^2(x)$ ne dozvoljava dekuplovanje polja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$.

U kompresibilnom modelu, medjutim, postoji još jedan uslov stabilnosti ove fiksne tačke, naime

$$\lambda_{\hat{w}}^{H} < 0 \tag{4.95}$$

gde je $\lambda_{\hat{w}}^{H}$ skejling eksponent dugodometne interakcije koja kupluje dva polja u hamiltonijanu (4.3). On se dobija kao treća svojstvena vrednost matrice

$$\hat{M}^{mH-(n-m)H} = \begin{pmatrix} \varepsilon-(m+2)\left(2u^{*H}\hat{C}_4-5(u^{*H})^2\hat{C}_4^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon-(n-m+2)\left(2v^{*H}\hat{C}_4-5(v^{*H})^2\hat{C}_4^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix}\varepsilon-\left[(m+2)u^{*H}+(n-m+2)v^{*H}\right]\hat{C}_4+ \\ +\frac{5\hat{C}_4^2}{2}\left[(m+2)(u^{*H})^2+(n-m+2)(v^{*H})^2\right]\end{matrix} \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

koju je lako formirati iz linearizovanih rekurentnih relacija, stavljajući $u^* = u^{*H}(m)$, $v^* = u^{*H}(n-m)$, $w^* = \hat{w}^* = \hat{u}^* = \hat{v}^* = 0$, prema definiciji fiksne tačke mH-(n-m)H. Ona je odmah u dijagonalnoj formi, gde su prve dve svojstvene vrednosti upravo $\lambda_{\hat{u}}$ i $\lambda_{\hat{v}}$ u fiksnoj tački mH-(n-m)H, koje su

$$\lambda_{\hat{u}}^{mH-(n-m)H} = \hat{\lambda}_1^{H}(m) \tag{4.97}$$

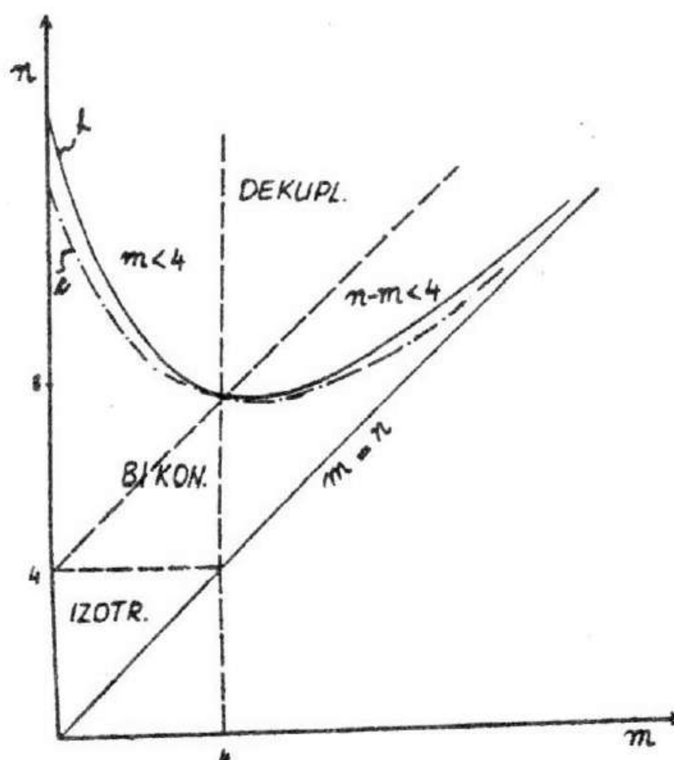
$$\lambda_{\hat{u}}^{mH-(n-m)H} = \hat{\lambda}_1^{H}(n-m) \tag{4.98}$$

gde je $\hat{\lambda}_1^{H}(k)$ dato sa (4.62), skejling eksponenti izotropnih dugodometnih interakcija polja $\vec{\sigma}(x)$ i $\vec{S}(x)$, u "unconstrained" fiksnoj tački modela sa potpuno dekuplovanim poljima. Treća

svojstvena vrednost pripada interakcionom članu tih polja $\hat{w}$-. Iz (4.96) i (4.92) očigledno je

$$\lambda_{\hat{w}}^{mH-(n-m)H} = \lambda_{w}^{mH-(n-m)H} \tag{4.99}$$

odakle sledi da dugodometna interakcija koja kupluje dva spinska polja ne menja oblast stabilnosti dekuplovanih fiksnih tačaka krutog modela, koja je odredjena uslovom (4.94).



sl. 10.

Iz uslova (4.94) nalazimo da će u krutom modelu doći do dekuplovanja kritičnih polja tek kada je zbir komponenti tih polja veliki (minimum krive h je na n ≈ 8, pri m ≈ 4). Fizički, n ≥ 4 - komponentnim vektorskim modelom opisuju se fazni prelazi koji uključuju porast elementarne ćelije sistema, u jednom ili više pravaca [45].

Dekuplovana fiksna tačka krutog modela mH-(n-m)H je medjutim nestabilna u odnosu na izotropne dugodometne perturbacije $\hat{u}$- i $\hat{v}$- , kada je $m<4-4\varepsilon$ ili $n-m<4-4\varepsilon$. U toj oblasti egzistira krosover u "contrained" dekuplovanu fiksnu tačku mC-(n-m)C.

U "constrained" dekuplovanoj fiksnoj tački mC-(n-m)C, nalazimo skejling eksponente $\lambda_{\hat{u}}^{mC-(n-m)C}$, $\lambda_{\hat{v}}^{mC-(n-m)C}$ i $\lambda_{\hat{w}}^{mC-(n-m)C}$ iz matrice

$$\hat{M}^{mC-(n-m)C} = \begin{pmatrix} \varepsilon-[2m\hat{u}^{*C}+2(m+2)u^{*H}]\hat{C}_d + 5(m+2)(u^{*H})^2\hat{C}_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon-[2(n-m)\hat{v}^{*C}+2(n-m+2)v^{*H}]\hat{C}_d + 5(n-m+2)(v^{*H})^2\hat{C}_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{l}\varepsilon-[(m+2)u^{*H}+(n-m+2)v^{*H} + \\ + m\hat{u}^{*C}+(n-m)\hat{v}^{*C}]\hat{C}_d + \\ + \frac{5\hat{C}_4^2}{4}[(m+2)(u^{*H})^2+(n-m+2)(v^{*H})^2]\end{array} \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

gde su $u^{*H} = u^{*H}(m)$, $v^{*H} = u^{*H}(n-m)$, $\hat{u}^{*C} = \hat{u}^{*C}(m)$ i $\hat{v}^{*C} = \hat{u}^{*C}(n-m)$, a $u^{*H}(k)$ i $\hat{u}^{*C}(k)$ izrazi oblika (4.71) i (4.72). Neposredan račun daje

$$\lambda_{\hat{u}}^{mC-(n-m)C} = \hat{\lambda}_1^C(m) \quad (4.101)$$

$$\lambda_{\hat{v}}^{mC-(n-m)C} = \hat{\lambda}_1^C(n-m) \quad (4.102)$$

i

$$\lambda_{\hat{w}}^{mC-(n-m)C} = \frac{m^2-mn-n+24}{(m+8)(n-m+8)}\varepsilon + \frac{1}{2}\left[\frac{(m+2)(13m+44)}{(m+8)^3} + \frac{(n-m+2)(13n-13m+44)}{(n-m+8)^3}\right]\varepsilon^2 , \quad (4.103)$$

gde je $\hat{\lambda}_1^C(k)$ dato formulom (4.75). Očigledno je $\lambda_{\hat{u}}^C(m)=-\lambda_{\hat{u}}^H(m)$ i $\lambda_{\hat{v}}^C(n-m) = -\lambda_{\hat{v}}^H(n-m)$, zbog izotropnosti dekuplovanih modela. Za $m<4-4\varepsilon$ i $(n-m)<4-4\varepsilon$, ovi skejling eksponenti su negativni. Uslov negativnosti $\lambda_{\hat{w}}^{mC-(n-m)C}$ daje oblast stabilnosti dekuplovane "constrained" fiksne tačke

$$n > \frac{m^2+24}{m+1} + o(\varepsilon) \qquad (4.104)$$

(oblast iznad krive c) na sl.10). Oblast stabilnosti dekuplovanih tačaka se neznatno pomera prema manjim vrednostima n, kod kompresibilnog modela.

III GLAVA: POSLEDICE ZAVISNOSTI INTERAKCIONIH PARAMETARA. OSVRT NA REZULTATE ZA MODEL SA DVA KRITIČNA POLJA

5. Skup nezavisnih interakcionih parametara

Do sada smo analizirali model sa dva kritična polja (4.3) smatrajući indukovane 4-spinske interakcije nezavisnim perturbacije. Medjutim, veza medju interakcionim parametrima ovih članova $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$

$$\hat{u}\hat{v} = \hat{w}^2 \tag{5.1}$$

zahteva izvesne restrikcije rezultata dobijenih u prethodnoj glavi. Prvo, relacija (5.1) smanjuje broj nezavisnih interakcionih parametara i modifikuje kvadratne članove u rekurentnim relacijama (4.20-22) na očigledan način. Na osnovu (5.1) je jasno da će moguće fiksne tačke pomenutih rekurentnih relacija biti vezane za jednu površ u potprostoru parametara $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$. Medjutim, na osnovu kvadratne veze medju ovim interakcionim parametrima nije jasno koji od njih je suvišan. S druge strane, parametri $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$ su pogodni za perturbacioni razvoj, što je i bio osnovni razlog da ih zadržimo u našoj analizi sve do ovog mesta. Neke linearne kombinacije ovih parametara mogu predstavljati nove medjusobno nezavisne interakcione parametre u modelu sa dva kritična polja.

Analiza data u drugoj glavi nam sugerira da, s obzirom na postojanje jednog izotropnog operatora dvospinske interakcije $\mathcal{T}$, datog sa (4.53), i (n-1)-operatora dvospinske anizotropije, (4.52), ukupnu dvospinsku interakciju prepišemo u obliku

$$TSI = -\frac{1}{2}\int_{\vec{q}}(q^2+r_o)(|\sigma_{\vec{q}}|^2+|S_{\vec{q}}|^2) + \frac{\Delta}{2n}\int_{\vec{q}}\left[(n-m)|\sigma_{\vec{q}}|^2 - m|S_{\vec{q}}|^2\right] \tag{5.2}$$

tj. da drugačije definišemo dvospinske interakcione parametre r_σ i r_S. Iz (5.2) sledi

$$r_\sigma = r_o - \frac{n-m}{n}\Delta$$
$$r_S = r_o + \frac{m}{n}\Delta \tag{5.3}$$

gde je r_o poznata dvospinska konstanta izotropnog modela, proporcionalna relativnoj temperaturi $\frac{T-T_C}{T_C}$. Ovakav izbor dvospinskih interakcionih parametara neposredno daje četvorospinske interakcione parametre g_σ i g_S u obliku:

$$g_\sigma = g_o + (n-m)\Delta$$
$$g_S = g_o - m\Delta \, . \tag{5.4}$$

Izraženi pomoću (5.4) interakcioni parametri $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$ (videti 4.4-6) glase

$$\hat{u} = K + (n-m)^2D+2(n-m)L$$
$$\hat{v} = K + m^2D - 2mL \tag{5.5}$$

i

$$\hat{w} = K-m(n-m)D + (n-2m)L$$

gde su K, D i L novi interakcioni parametri, definisani na sledeći način:

$$K \equiv \frac{2g_o^2}{c_{11}} , \qquad D \equiv \frac{2\Delta^2}{c_{11}} \qquad i \qquad L \equiv \frac{2g_o\Delta}{c_{11}} \tag{5.6}$$

Iz (5.5) novi interakcioni parametri mogu da se izraze preko starih:

$$D = \frac{1}{n^2}\left\{\hat{u} + \hat{v} - 2\hat{w}\right\} \tag{5.7}$$

$$K = \frac{1}{n^2}\left\{m^2 u + (n-m)^2 \hat{v} + 2m(n-m)\hat{w}\right\} \tag{5.8}$$

$$L = \frac{1}{n^2}\left\{m\hat{u} - (n-m)\hat{v} + (n-2m)\hat{w}\right\}. \tag{5.9}$$

Na osnovu ovih relacija, koristeći rekurentne relacije za interakcione parametre $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$ u kojima je $\hat{w}^2$ zamenjeno sa $\hat{u}\cdot\hat{v}$ (videti 4.20-22), nalazimo rekurentne relacije za nove interakcione parametre K, D i L, držeći u, v i w u Heisenbergovoj fiksnoj tački (4.35). Napisane u diferencijalnom obliku, one su:

$$\frac{dK}{d\ell} = K\left[\hat{\lambda}_1^H - nK - mn(n-m)D\right] \tag{5.10}$$

$$\frac{dD}{d\ell} = D\left[\hat{\lambda}_2^H - nK - mn(n-m)D\right] \tag{5.11}$$

i

$$\frac{dL}{d\ell} = L\left[\frac{\hat{\lambda}_1^H + \hat{\lambda}_2^H}{2} - nK - mn(n-m)D\right] \tag{5.12}$$

gde je $\ell \equiv \ell nb$, $\hat{\lambda}_1^H$ i $\hat{\lambda}_2^H$ su skejling eksponenti u Heisenbergovoj fiksnoj tački, dati izrazima (4.62-63), respektivno. Po definiciji, novi interakcioni parametri zadovoljavaju relaciju

$$K\cdot D = L^2 . \tag{5.13}$$

U skupu rekurentnih relacija (5.10-12) lako je videti da je (5.12) linearna kombinacija drugih dveju rekurentnih relacija, i odbacujemo je. Jedina fizička informacija koja sledi iz (5.12) je da se znak proizvoda $g_o \cdot \Delta$ ne menja sa iteracijama RNG.

Potreban skup medjusobno nezavisnih interakcionih parametara čine K i D. Primetimo da K meri jačinu izotropnog kuplovanja sa rešetkom, dok je D srazmerno kvadratu anizotropije. Rekurentne relacije (5.10) i (5.11) imaju upravo one fiksne tačke koje smo prethodno našli u prostoru $\hat{u}$, $\hat{v}$ i $\hat{w}$. One su

$$\text{(H)} \quad K^* = D^* = 0 \qquad (\hat{u}^* = \hat{v}^* = \hat{w}^* = 0), \tag{5.14}$$

$$\text{(IC)} \quad D^* = 0, \; K^* = \frac{\hat{\lambda}_1^H}{n} \qquad (\hat{u}^* = \hat{v}^* = \hat{w}^* = \frac{\hat{\lambda}_1^H}{n}) , \tag{5.15}$$

i

$$\text{(AC)} \quad K^* = 0, \quad D^* = \frac{\hat{\lambda}_2^H}{mn(n-m)}$$

$$(\hat{u}^* = \frac{n-m}{mn} \hat{\lambda}_2^H, \quad \hat{v}^* = \frac{m}{n(n-m)} \hat{\lambda}_2^H, \; \hat{w}^* = -\frac{\hat{\lambda}_2^H}{n}). \tag{5.16}$$

Štaviše, analiza u KD-ravni pokazuje da model sa dva polja i nema više fiksnih tačaka ($K^* \neq 0$ i istovremeno $D^* \neq 0$ dovodi do kontradikcije), pod pretpostavkom da su u^*, v^* i w^* fiksirani u Heisenbergovoj fiksnoj tački krutog modela (4.71), tj. ako se ograničimo na oblast malog broja spinskih komponenti ($n<4-2\varepsilon+o(\varepsilon^2)$).

Analiza linearizovanih rekurentnih relacija u KD-ravni

je jednostavna. Dijagonalizacijom odgovarajućih 2x2 matrica u fiksnim tačkama (H), (IC) i (AC) dobijamo po dva skejling eksponenta, koji opisuju ponašanje izotropnih perturbacija K i anizotropnih perturbacija D, respektivno. Dati uz odgovarajuće svojstvene vektore, oni su

$$\text{u (H)} \quad y_1^H = \hat{\lambda}_1^H, \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad y_2^H = \hat{\lambda}_2^H, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

$$\text{u (IC)} \quad y_1^C = -\hat{\lambda}_1^H, \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad y_2^C = \hat{\lambda}_2^H - \hat{\lambda}_1^H, \quad \begin{pmatrix}D^*\\-K^*\end{pmatrix} \tag{5.18}$$

i

$$\text{u (AC)} \quad y_1^A = \hat{\lambda}_1^H - \hat{\lambda}_2^H, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad y_2^A = -\hat{\lambda}_2^H \quad \begin{pmatrix}-D^*\\K^*\end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Svojstveni vektori računati u jednoj fiksnoj tački obrazuju tangencijalnu ravan na površi $\hat{u}\hat{v} = \hat{w}^2$ u prostoru parametara $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$. U KD-ravni fiksne tačke i odgovarajuće trajektorije RNG prikazane su na sl. 11.). Prava koja spaja netrivijalne fiksne tačke u KD-ravni tj.

$$\frac{K}{K^*} + \frac{D}{D^*} = 1 \tag{5.20}$$

je kritična trajektorija.

Pošto smo stabilnost ovih fiksnih tačaka diskutovali u prethodnoj glavi, ovde ćemo samo konstatovati da je AC-fiksna tačka potpuno stabilna u potprostoru interakcionih parametara K,D. U IC-fiksnoj tački izotropni kapling spinova sa rešetkom opada eksponencijalno pri iteracijama RNG:

$$\frac{g_o^2}{C_{11}} \sim e^{-\hat{\lambda}_1^H \cdot \ell} \qquad (5.21a)$$

a anizotropni kapling raste

$$\frac{\Delta^2}{C_{11}} \sim e^{\hat{\lambda}_2^H \cdot \ell} , \qquad (5.21b)$$

dok u AC fiksnoj tački oba opadaju prema relacijama

$$\frac{g_o^2}{C_{11}} \sim e^{(\hat{\lambda}_1^H - \hat{\lambda}_2^H) \cdot \ell} , \quad \frac{\Delta^2}{C_{11}} \sim e^{-\hat{\lambda}_2^H \cdot \ell} \qquad (5.22)$$

jer je $\hat{\lambda}_1^H < \hat{\lambda}_2^H$ (videti formule 4.62 i 4.63).

5.1. Renormalizacija skejling eksponenata

U odeljku 3.2. koji je posvećen izotropnom kompresibilnom modelu našli smo da su kritični indeksi u "constrained" fiksnoj tački u Fisher-ovom smislu renormalizovani 13 kritični indeksi krutog Heisenbergovog modela. Medjutim, za kompresibilni model sa izmenskom anizotropijom važi opštiji tip renormalizacije skejling eksponenata, koji uključuje i pomenutu Fisher-renormalizaciju u izotropnoj "constrained" fiksnoj tački, kao specijalan slučaj.

U Heisenbergovoj fiksnoj tački našeg kompresibilnog modela skejling eksponenti dugodometnih perturbacija y_1^H i y_2^H (videti (5.17) i (4.62-63)) mogu se izraziti preko skejling eksponenata izotropne odnosno anizotropne dvospinske interakcije, λ^H i λ_Δ^H, na sledeći način:

$$y_1^H = 2\lambda^H - d = \frac{\alpha^H}{\nu^H} \qquad (5.23)$$

$$y_2^H = 2\,\lambda^H - d \qquad (5.24)$$

gde su λ^H i λ_Δ^H dati formulama (3.43a) i (3.43b). Ovakve relacije je predvideo Bender [17] koristeći RNG u Wegnerovom prilazu [5] za generalan spinski sistem kuplovan sa rešetkom. Direktnim računanjem skejling eksponenata u ε-razvoju mi pokazujemo da ove relacije važe.

Skejling eksponenti λ^C i λ_Δ^C dvospinskih operatora i , izračunati u izotropnoj "constrained" fiksnoj tački stoje u vezi sa odgovarajućim skejling eksponentima u Heisenbergovoj fiksnoj tački na sledeći način:

$$\lambda^C = d - \lambda^H \tag{5.25}$$

$$\lambda_\Delta^C = \lambda_\Delta^H \tag{5.26}$$

i dovode do Fisher-renormalizacije kritičnih indeksa, uključujući i krosover eksponent u odnosu na izmensku anizotropiju. Skejling eksponent y_1^C izotropnih dugodometnih perturbacija u KD-ravni takodje je renormalizovan u smislu (5.23), naime

$$y_1^C = - y_1^H = 2\lambda^C - d \tag{5.27}$$

što neposredno sledi iz (5.18), (4.62) i (3.44b).

Što se tiče skejling eksponenta anizotropnih dugodometnih perturbacija duž D-ose u KD-ravni, on je renormalizovan u anizotropnoj "constrained" fiksnoj tački:

$$y_2^A = 2\lambda_\Delta^A - d \tag{5.28}$$

(videti (5.19), (4.64) i (4.83b)).Skejling eksponenti λ^A i λ_Δ^A dvospinskih operatora $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{D}$, u AC fiksnoj tački takodje stoje u vezi sa λ^H i λ_Δ^H ali, za razliku od (5.25-26), λ_Δ^A je renormalizovano:

$$\lambda^{A} = \lambda^{H} \tag{5.29}$$

$$\lambda_{\Delta}^{A} = d - \lambda_{\Delta}^{H} , \tag{5.30}$$

uslovljavajući renormalizaciju samo krosover eksponenta ϕ_{Δ}^{A} i to ne u Fisherovom smislu. Naime, iz (5.30) nalazimo sledeću relaciju

$$\phi_{\Delta}^{A} + \phi_{\Delta}^{H} = 2-\alpha^{H} \tag{5.31}$$

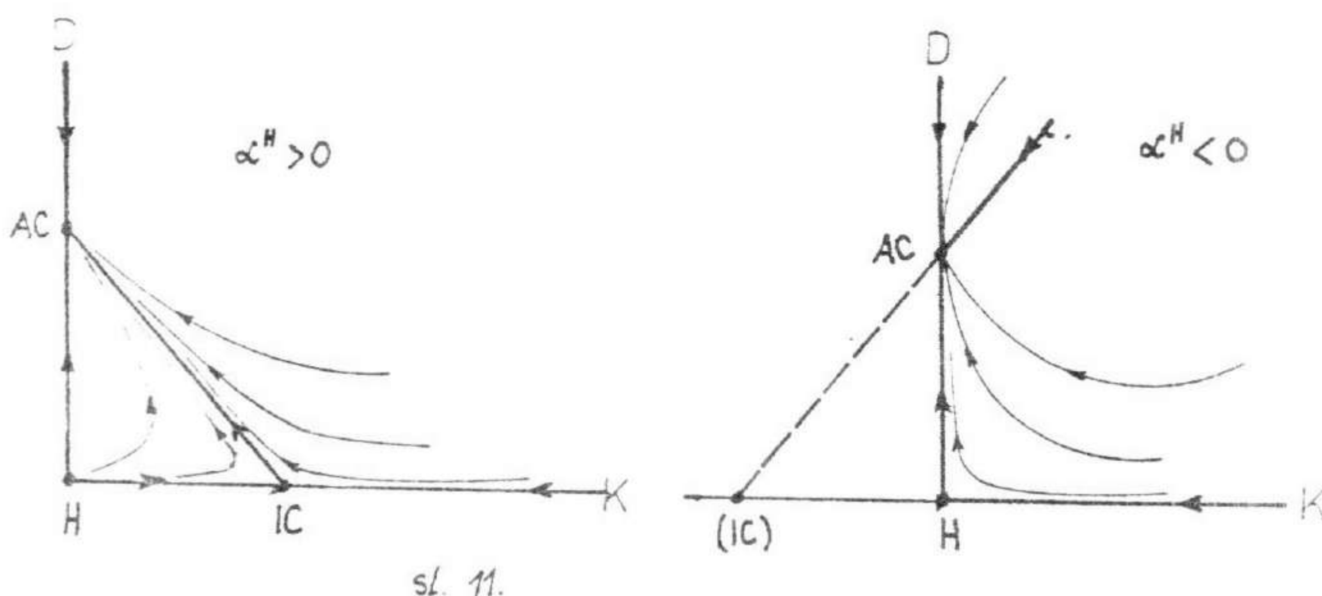
gde su α^{H} i ϕ_{Δ}^{H} kritični indeks specifične toplote i krosover eksponent u odnosu na spinsku anizotropiju za kruti Heisenbergov model.

5.2. Krosover efekti u modelu sa dva kritična polja

Poznavanje fiksnih tačaka i skejling eksponenata relevantnih operatora u tim fiksnim tačkama za hamiltonijan koji opisuje dati fizički sistem, daje uvid u moguće efekte na sisteme kada temperatura (T) teži kritičnoj temperaturi (T_C). Pozitivnost jednog skejling eksponenta u odredjenoj fiksnoj tački odgovara egzistenciji krosovera u drugu fiksnu tačku, u kojoj je odgovarajući operator nerelevantan. "Kretanje" hamiltonijana u prostoru parametara pri $T \to T_C$ prati odredjenu trajektoriju RNG, u zavisnosti od početnih vrednosti interakcionih parametara. Na slici 11.) su date fiksne tačke i trajektorije RNG u KD-ravni.

Heisenbergova fiksna tačka (H) bi fizički odgovarala slučaju kada sve dugodometne interakcije iščezavaju, tj opisuje

ponašanje koje bi imao jedan nekompresibilan magnet. Medjutim, ova fiksna je nestabilna u odnosu na perturbacije koje teže da izvedu hamiltonijan iz koordinatnog početka i duž K-ose i duž



sl. 11.

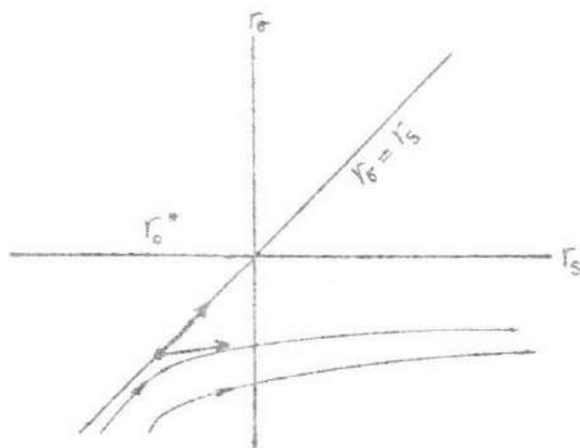
D-ose. Skejling eksponenti ovih perturbacija, y_1^H i y_2^H, su pozitivni, pri $n<4-4\varepsilon$, kao što smo prethodno utvrdili. Pri ovom broju spinskih komponenti, IC-fiksna tačka postaje stabilna u odnosu na izotropne perturbacije duž K-ose, $y_1^C<0$, medjutim, $y_2^C>0$ uslovljava krosover prema AC-fiksnoj tački. U ovom slučaju, RNG-trajektorije stoje kao na slici 11a).

Fizički, krosover efekat se očituje u blizini odredjene fiksne tačke. Pri $n<4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2)$, što odgovara pozitivnosti kritičnog indeksa specifične toplote $(\hat{\lambda}_1^H = \frac{\alpha^H}{\nu^H})$, za slučaj male anizotropije, prvo se pojavljuje krosover efekat u blizini IC fiksne tačke, a zatim hamiltonijan sistema "prilazi" AC-fiksnoj tački.

Obrnuto, za slučaj $\alpha^H<0$ $(n>4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2))$, IC fiksna

tačka se nalazi na nefizičkom delu K-ose, a H-fiksna tačka postaje stabilna u odnosu na izotropne perturbacije. RNG trajektorije stoje kao na sl. 11b).

Analiza modela sa dva kritična polja, kojoj smo posvetili dve prethodne glave, pretpostavljala je $r_\sigma \sim r_S \sim o(\varepsilon)$ (videti (4.27)). Drugim rečima, efekti koje opisuju fiksne tačke H, IC i AC se dešavaju u blizini jedne izotropne fiksne tačke $r_\sigma^* = r_S^*$ (videti (4.41)) u prostoru dvospinskih interakcionih parametara (sl.12). Duž ose izotropije $r_\sigma = r_S$ leži svojstveni



sl. 12.

vektor operatora izotropne dvospinske interakcije, koji je odgovoran za temperatursku nestabilnost sistema, dok pravac anizotropnih perturbacija odstupa od te ose, kao na sl. 12. Ukoliko je $r_S > r_\sigma$, trajektorije se razilaze od izotropne fiksne tačke $r_\sigma^* = r_S^*$ i teže prema fiksnoj tački u kojoj je $r_S^* = \infty$. Ovaj slučaj je predstavljen na sl. 12). Fizički, $r_S^* = \infty$ znači da spinske komponente $S_j(x)$, $j = 1, \ldots (n-m)$, neće trpeti kritične fluktuacije i kritično ponašanje će se očitavati samo u potprostoru napravljenom od σ_i varijabli, $i = 1, 2, \ldots m$. Ovakvo ponašanje je posledica prisustva spinske anizotropije, tako da na sliku krosover efekata u KD-ravni treba dodati krosover iz AC

fiksne tačke u anizotropno kritično ponašanje koje karakteriše samo jedno kritično polje. Ovo će biti predmet analize u narednoj glavi.

IV GLAVA: KROSOVER U OBLAST MANJE-KOMPONENTNOG SPINSKOG SISTEMA

6. Rekurentne relacije za hamiltonijan sa jednim kritičnim poljem

Beskonačno daleke fiksne tačke transformacija RNG za model sa dva polja (4.3) leže u oblasti prostora parametara gde interakcioni parametri koji su u vezi sa spinskim poljem $\vec{S}(x)$ divergiraju. Naime, u oblasti impulsa $r_c<p^2<r_S$ trajektorije RNG se razilaze od fiksnih tačaka koje su asocirane sa $r_S^*=0(\varepsilon)$ i teže fiksnim tačkama transformacija (4.12-13), (4.17-22) za koje je

$$r_S^* = \infty . \qquad (6.1)$$

Ako se sve rekurentne relacije napišu u diferencijalnom obliku (videti (4.24)), onda je lako videti, bez ikakvog računa, da su fiksne tačke koje odgovaraju divergenciji r_S kao u (6.1), oblika

$$(u^*=u^*(m), \quad \hat{u}^*=\hat{u}^*(m), \quad w^*=v^*=\hat{w}^*=\hat{v}^*=\infty) \qquad (6.2)$$

gde su $u^*(m)$ i $\hat{u}^*(m)$ dve konačne fiksne vrednosti koje zavise samo od broja komponenti spinskog polja $\vec{\sigma}(x)$. Njih ćemo kasnije specificirati. Spinsko polje $\vec{S}(x)$ u ovakvim fiksnim tačkama nema kritične fluktuacije.

Da bi korektno mogli da radimo sa fiksnim tačkama tipa (6.2), koristićemo jednu proceduru u kojoj takve fiksne tačke mogu da se uzmu sa konačnim fiksnim vrednostima svih kapling konstanti, reskaliranjem spinskog polja $\vec{S}(x)$

$$S_i(x) = \frac{1}{\sqrt{r_S}}\,\varphi_i(x) \qquad (6.3)$$

$i = 1,2,\ldots(n-m)$. Ovim postupkom, u igru ulaze dimenzioni parametri $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{\hat{v}}$ i $\tilde{\hat{w}}$, umesto bezdimenzionih v, w, $\hat{v}$ i $\hat{w}$ u originalnom hamiltonijanu:

$$\tilde{v} = \frac{v}{r_S^2}\,, \qquad \tilde{\hat{v}} = \frac{\hat{v}}{r_S^2}$$
$$\tilde{w} = \frac{w}{r_S} \quad \text{i} \quad \tilde{\hat{w}} = \frac{\hat{w}}{r_S} \qquad (6.4)$$

Efektivni hamiltonijan napisan preko polja $\vec{\sigma}(x)$, $\vec{\varphi}(x)$ je sledećeg oblika:

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{2}\sum_i \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\left[(q^2+r_\sigma)\sigma^i_{\vec{q}}\sigma^i_{-\vec{q}} + \left(1+\frac{q^2}{r_S}\right)\varphi^i_{\vec{q}}\varphi^i_{-\vec{q}}\right] +$$
$$+ \sum_{i,j}\iiiint \frac{d^dq_1}{(2\pi)^d}\frac{d^dq_2}{(2\pi)^d}\frac{d^dq_3}{(2\pi)^d}\frac{d^dq_4}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{4}\Big[u\,\sigma^i_{\vec{q}_1}\sigma^i_{\vec{q}_2}\sigma^j_{\vec{q}_3}\sigma^j_{\vec{q}_4} +$$
$$+ 2\tilde{w}\,\sigma^i_{\vec{q}_1}\sigma^i_{\vec{q}_2}\varphi^j_{\vec{q}_3}\varphi^j_{\vec{q}_4} + \tilde{v}\,\varphi^i_{\vec{q}_1}\varphi^i_{\vec{q}_2}\varphi^j_{\vec{q}_3}\varphi^j_{\vec{q}_4}\Big]\delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4) +$$
$$+ \frac{1}{4\Omega}\sum_{i,j}\Big[\iint\frac{d^dq_1}{(2\pi)^d}\frac{d^dq_2}{(2\pi)^d}\Big(\sigma^i_{\vec{q}_1}\sigma^i_{-\vec{q}_1}\sigma^j_{\vec{q}_2}\sigma^j_{-\vec{q}_2} +$$
$$+ 2\tilde{\hat{w}}\,\sigma^i_{\vec{q}_1}\sigma^i_{-\vec{q}_1}\varphi^j_{\vec{q}_2}\varphi^j_{-\vec{q}_2} + \tilde{\hat{v}}\,\varphi^i_{\vec{q}_1}\varphi^i_{-\vec{q}_1}\varphi^j_{\vec{q}_2}\varphi^j_{-\vec{q}_2}\Big)\Big] \qquad (6.5)$$

Pošto forma rekurentnih relacija u principu ne zavisi od početnih vrednosti interakcionih parametara, može se očekivati da rekurentne relacije za novi skup parametara u, $\hat{u}$, $\tilde{w}$, $\hat{\tilde{w}}$, $\hat{\tilde{v}}$ i $\tilde{\tilde{v}}$ hamiltonijana (6.5) budu iste kao (4.17-22), uz odgovarajuću zamenu (6.4). Rekurentne relacija za r_σ (4.12), ostaje takodje ista, pošto r_σ-varijabla ne učestvuje u reskaliranju (6.3). Medjutim, ovaj stav zahteva izvesna obrazloženja, pošto izbor polja $\vec{S}(x)$ prema (6.3) unosi bitne razlike u propagator koji mu je pridružen. Naime, novi propagator

$$\Gamma_S = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{r_S}} \tag{6.6}$$

se pojavljuje u teoriji umesto (4.11).

Rekurentne relacije za kapling-konstante u efektivnom hamiltonijanu (6.5) su sledeće:

$$r_\sigma' = b^{2-\eta_\sigma}\Big\{ r_\sigma + [(m+2)u + m\hat{u}] \int_{|\vec{q}|>\frac{1}{b}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{r_\sigma + q^2} + (n-m)(\tilde{w} + \hat{\tilde{w}}) \int_{|\vec{q}|>\frac{1}{b}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 + q^2/r_S} - \dots \Big\} \tag{6.7}$$

$$1 = b^{2-\eta_S}\Big\{ 1 + [(n-m+2)\tilde{v} + (n-m)\hat{\tilde{v}}] \int_{|\vec{q}|>\frac{1}{b}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 + q^2/r_S} + m(\tilde{w} + \tilde{\tilde{w}}) \int_{|\vec{q}|>\frac{1}{b}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{r_\sigma + q^2} - \dots \Big\} \tag{6.8}$$

$$u' = b^{\varepsilon-2\eta_\sigma}\Big\{ u - (m+8)u^2 \int_{|\vec{q}|>\frac{1}{b}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r_\sigma + q^2)^2} - (n-m)\tilde{w}^2 \int_{|\vec{q}|>\frac{1}{b}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(1 + q^2/r_S)^2} + \dots \Big\} \tag{6.9}$$

$$\tilde{v}' = b^{\varepsilon-2\eta_s}\left\{\tilde{v} - (n-m+8)\,\tilde{v}^2\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(1+q^2/r_s)^2} - m\,\tilde{w}^2\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_\sigma+q^2)^2}+\cdots\right\} \qquad (6.10)$$

$$\tilde{w}' = b^{\varepsilon-\eta_\sigma-\eta_s}\left\{\tilde{w} - (m+2)\,u\,\tilde{w}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_\sigma+q^2)^2} - (n-m+2)\,\tilde{w}\tilde{v}\,\times\right.$$

$$\left.\times\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(1+\frac{q^2}{r_s}\right)^2} - 4\tilde{w}^2\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_\sigma+q^2)\left(1+\frac{q^2}{r_s}\right)}+\cdots\right\} \qquad (6.11)$$

$$\hat{u}' = b^{\varepsilon-2\eta_\sigma}\left\{\hat{u} - \left[m\,\hat{u}^2 + 2(m+2)\,u\,\hat{u}\right]\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_\sigma+q^2)^2} -\right.$$

$$\left.-(n-m)\left(2\tilde{w}\hat{\tilde{w}} + \hat{\tilde{w}}^2\right)\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(1+q^2/r_s)^2}+\cdots\right\} \qquad (6.12)$$

$$\hat{\tilde{v}}' = b^{\varepsilon-2\eta_s}\left\{\hat{\tilde{v}} - \left[(n-m)\,\hat{\tilde{v}}^2 + 2(n-m+2)\,\tilde{v}\hat{\tilde{v}}\right]\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(1+q^2/r_s)^2}\right.$$

$$\left.-\,m\left(2\tilde{w}\hat{\tilde{w}} + \hat{\tilde{w}}^2\right)\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_\sigma+q^2)^2}+\cdots\right\} \qquad (6.13)$$

$$\hat{\tilde{w}}' = b^{\varepsilon-\eta_\sigma-\eta_s}\left\{\hat{\tilde{w}} - \left[(n-m+2)\,\tilde{v}\hat{\tilde{w}} + (n-m)\left(\hat{\tilde{v}}\hat{\tilde{w}} + \tilde{w}\hat{\tilde{v}}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(1+q^2/r_s)^2} - \left[(m+2)\,u\,\hat{\tilde{w}} + m\left(\hat{u}\,\hat{\tilde{w}} + \tilde{w}\,\hat{u}\right)\right]\times \qquad (6.14)$$

$$\left.\times\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(r_\sigma+q^2)^2}+\cdots\right\}$$

gde su izostavljeni članovi višeg reda (uporediti sa rekurentnim relacijama (4.12-13) i (4.17-22)). Ovde su sada

$$\eta_\sigma = \eta_\sigma(u, \tilde{w}) \tag{6.15a}$$

$$\eta_S = \eta_S(\tilde{v}, \tilde{w}) \tag{6.15b}$$

funkcije novih interakcionih parametara. Oblik ovih funkcija je esencijalna karakteristika modela i dat je relacijama (4.15) i (4.16) respektivno.

Skup rekurentnih relacija (6.7-14) odnosi se na naš model u kome je samo $\vec{\sigma}(x)$ kritično polje. U poredjenju sa rekurentnim relacijama koje važe u modelu sa oba kritična polja, relacija (6.8) je formalni analogan relaciji (4.13). Iz nje, medjutim, slede neke bitne posledice na kritično ponašanje sistema sa jednim kritičnim poljem, što ćemo niže videti.

6.1. Fiksne tačke i skejling eksponenti modela sa jednim kritičnim poljem

Fiksne tačke rekurentnih relacija (6.7-14) koje odgovaraju uslovu

$$\frac{1}{r_S^{\,*}} \equiv x_S^{\,*} = 0 \tag{6.16}$$

zahtevaju da bude

$$\tilde{v}^* = \tilde{w}^* = \tilde{\hat{v}}^* = \tilde{\hat{w}}^* = 0 \quad , \tag{6.17}$$

dok u^*, $\hat{u}^*$ i $r_\sigma^{\,*}$ ne podležu ovom zahtevu. Imajući (6.17), iz relacije (6.8) neposredno sledi da je u svim takvim fiksnim

tačkama

$$\eta_S = 2 \; . \tag{6.18}$$

Preostale tri rekurentne relacije (6.7), (6.9) i (6.12) uz zahtev (6.17) se svode na rekurentne relacije interakcionih parametara (r_σ, u i $\hat{u}$) jednog izotropnog m-komponentnog modela kompresibilnog feromagneta. Fiksne vrednosti odgovarajućih interakcionih parametara u^* i $\hat{u}^*$ definišu dve fiksne tačke od interesa: "unconstrained" (mH) odnosno "constrained" (mC) fiksnu tačku, kao što smo videli u paragrafu 3.1).

Tako, skup rekurentnih relacija za model sa jednim kritičnim poljem ima sledeće dve (dekuplovane) fiksne tačke:

$$(mH): \quad (u^*=u^{*H}(m),\ \hat{u}^*=0;\ \tilde{v}^*=\tilde{w}^*=\tilde{\hat{v}}^*=\tilde{\hat{w}}^*=0) \tag{6.19}$$

i

$$(mC): \quad (u^*=u^{*H}(m),\ \hat{u}^*=\hat{u}^{*C}(m);\ \tilde{v}^*=\tilde{w}^*=\tilde{\hat{v}}^*=\tilde{\hat{w}}^*=0) \tag{6.20}$$

gde su $u^{*H}(m)$ i $\hat{u}^{*C}(m)$ nama već dobro poznati izrazi (4.71) i (4.72). U ovim fiksnim tačkama r_σ^* ostaje reda ε.

Odmah je jasno da u fiksnim tačkama (6.19) i (6.20) skejling eksponenti koji se odnose na izotropne interakcije - λ, λ_1 i $\hat{\lambda}_1$ ostaju isti kao kod izotropnog kompresibilnog modela u Heisenbergovoj, odnosno u izotropnoj "constrained" fiksnoj tački. Oni su dati relacijama: (3.43b), (4.54) i (4.62) u (mH), odnosno relacijama (3.44b), (4.54) i (4.75) u (mC), gde treba staviti m umesto n ($m<n$).

Konsekventno, kritični indeksi ν, η, α,..., kao i krosover eksponent u odnosu na izotropnu dugodometnu interakciju - $\phi_{\hat{u}}$, odredjuju se istim formulama kao kod potpuno izotropnog

modela u II glavi, sa jednom razlikom što n treba zameniti jednim njegovim delom: $n \to m$.

Što se tiče anizotropnih perturbacija kako dvospinskih (operator $\mathcal{D}$), tako i četovorospinskih - reprezentovane operatorima $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \hat{\mathcal{D}}_2$ i $\hat{\mathcal{D}}_3$, u fiksnim tačkama (6.19) i (6.20) one postaju nerelevantni operatori u smislu RNG. Jednostavan račun do reda ε pokazuje da svi skejling eksponenti asocirani pomenutim operatorima spinske anizotropije postaju negativni.

Postupkom linearizacije rekurentnih relacija (6.7-6.14) u blizini fiksne tačke (6.19), odnosno fiksne tačke (6.20) dobijamo sve skejling eksponente od interesa, kao svojstvene vrednosti odgovarajuće matrice. Umesto r_S koje teži beskonačnosti pri iteracijama transformacija RNG, mi ćemo radije posmatrati veličinu

$$\chi_S \equiv \frac{1}{r_S} \tag{6.21}$$

koja teži nuli. Rekurentna relacija za χ_S se lako dobija iz (4.13) prema

$$\frac{d\chi_S}{d\ell} = -\frac{1}{r_S^2}\frac{dr_S}{d\ell} \tag{6.22}$$

gde je $\frac{dr_S}{d\ell}$ desna strana relacije (4.13) prepisane u diferencijalnom obliku. Zbog osobine (6.17) fiksnih tačaka, lako se vidi da se linearizacijom u svakoj od tih tačaka rekurentne relacije dekupluju i, prema tome, matrica transformacije će biti odmah u dijagonalnom obliku. Zbog toga i nećemo pisati matricu, nego samo skup linearizovanih rekurentnih relacija odredjenim redosledom, iz kojih se odmah mogu pročitati odgovarajući skejling eksponenti.

Imajući u vidu relaciju (6.18), skup linearizovanih rekurentnih relacija u diferencijalnom obliku je

$$\frac{d(\Delta\chi_S)'}{d\ell} = -2\Delta\chi_S \tag{6.23}$$

$$\frac{d(\Delta\tilde{v})'}{d\ell} = (\varepsilon - 4)(\Delta\tilde{v}) \tag{6.24}$$

$$\frac{d(\Delta\tilde{w})'}{d\ell} = (\varepsilon - 2 - (m+2)u^*\hat{C}_d)\cdot(\Delta\tilde{w}) \tag{6.25}$$

$$\frac{d(\Delta\tilde{\hat{v}})'}{d\ell} = (\varepsilon - 4)(\Delta\tilde{\hat{v}}) \tag{6.26}$$

i

$$\frac{d(\Delta\tilde{\hat{w}})'}{d\ell} = \left[\varepsilon - 2 - m\hat{u}^*\hat{C}_d - (m+2)u^*\hat{C}_d\right]\cdot(\Delta\tilde{\hat{w}}) - mu^*\hat{C}_d\cdot(\Delta\tilde{w}) \tag{6.27}$$

gde smo izostavili linearizovane rekurentne relacije za interakcione parametre r_σ, u i $\hat{u}$, iz razloga koje smo prethodno naveli. Ovde nismo eksplicitno stavili na koju od dve fiksne tačke (6.19) ili (6.20) se odnose u^* i $\hat{u}^*$.

S obzirom na oznake koje smo koristili u drugoj glavi za skejling eksponente operatora spinske anizotropije, u fiksnoj tački (mH) (6.19) nalazimo

$$\lambda_\Delta^{mH} = -2 \tag{6.28}$$

$$\lambda_2^{mH} = -4 + \varepsilon + o(\varepsilon^2) \tag{6.29}$$

$$\lambda_3^{mH} = -2 + \frac{6\varepsilon}{m+8} + o(\varepsilon^2) \tag{6.30}$$

$$\hat{\lambda}_2^{mH} = -4 + \varepsilon + o(\varepsilon^2) \tag{6.31}$$

$$\hat{\lambda}_3^{mH} = -2 + \frac{6\varepsilon}{m+8} + o(\varepsilon^2)\ . \tag{6.32}$$

Dakle, "unconstrained" fiksna tačka u modelu sa jednim kritičnim poljem je stabilna u odnosu na sve tipove anizotropnih perturbacija koje se pojavljuju u originalnom hamiltonijanu (4.3).

Slično, iz relacija (6.23-27) u "constrained" (mC) fiksnoj tački (6.20) nalazimo da su, očigledno, λ_Δ^{mC}, λ_2^{mC} i λ_3^{mC} jednaki odgovarajućim vrednostima u (mH) - fiksnoj tački, što je bitna karakteristika našeg kompresibilnog modela, a zatim i da je $\hat{\lambda}_2^{mC} = \hat{\lambda}_2^{mH}$ s tačnošću do reda ε. Preostala svojstvena vrednost je skejling eksponent operatora $\hat{\mathcal{D}}_3$ tj.

$$\hat{\lambda}_3^{mC} = -2 + \frac{m+2}{m+8}\varepsilon + o(\varepsilon^2) \tag{6.33}$$

Zanimljivo je da je $\hat{\lambda}_3^{mC} = \frac{\hat{\lambda}_3^{mH}}{1-\alpha^H(m)}$, do reda ε.

Obe fiksne tačke "constrained" i "unconstrained" fiksna tačka (6.19) i (6.20) stabilne su u odnosu na anizotropne perturbacije. Na račun te stabilnosti, jedan broj spinskih komponenti originalnog hamiltonijana ne trpi nikakvo uredjenje u blizini tih tačaka. Drugim rečima, fazni prelaz "doživljava" samo odredjen broj spinskih komponenti (m) koje su ortogonalne na "tvrde" ose. Razume se, medju ovim dvema fiksnim tačkama postoji "konkurencija", koja je u vezi sa stabilnošću u odnosu na izotropne dugodometne perturbacije, pošto se one pojavljuju kao fiksne tačke izotropnog kompresibilnog modela sa m-komponentnim spinom. Za $m<4-4\varepsilon+o(\varepsilon^2)$ m komponenti spinova kompresibilnog magneta sa anizotropijom pokazuju renormalizovan fazni prelaz drugog reda.

Z A K L J U Č A K

Za ponašanje n-komponentnog kompresibilnog magnetika sa izmenskom anizotropijom pri $T \to T_C$ su esencijalna sledeća dva faktora:

a) znak kritičnog indeksa specifične toplote tog magnetnog sistema na krutoj rešetci (α^H) i

b) jačina izmenske anizotropije.

Pri $\alpha^H > 0$ izotropni kompresibilni sistem pokazuje krosover u kritično ponašanje okarakterisano sa Fisher-renormalizovanim kritičnim eksponentima. U slučaju jake anizotropije redukovan broj spinskih komponenti ($m<n$) pokazuje u Fisherovom smislu renormalizovan fazni prelaz, pri $m<4-4\varepsilon+0(\varepsilon^2)$, odnosno regularan fazni prelaz druge vrste, pri $m>4-4\varepsilon+0(\varepsilon^2)$.

U slučaju male anizotropije sistem pokazuje sukcesivno niz krosover efekata pre nego što se postigne kritično uredjenje duž osa lakog namagnetisanja. Pri $\alpha^H > 0$, krosover efekti se dešavaju ovim redom: IC→AC→ anizotropno ponašanje. Obrnuto, pri $\alpha^H < 0$, "linija" krosovera počinje sa ponašanjem koje odgovara krutom modelu: H→AC→ anizotropno ponašanje.

Pri dovoljno jakoj anizotropiji, trajektorije RNG ne prolaze u blizini fiksnih tačaka H ili IC, tako da se krosover efekat pojavljuje samo u blizini AC fiksne tačke: AC→anizotropno ponašanje.

Efektivni spinski hamiltonijan koji smo razmatrali u ovom radu adekvatan je za opisivanje kompresibilnog feromagnetika sa izmenskom anizotropijom i uniaksijalnog antiferomagnetika u paralelnom polju. Uslovi stabilnosti kanonske raspodele $e^{-\mathcal{H}_{eff.}}$ $|u>0$ (ili $v>0$), $uv>w^2|$ uslovljavaju ograničenje na jačinu kuplovanja spinskog sistema sa rešetkom: $g^2<2C_{11}\cdot u_o$ i $g_S^2<2C_{11}\cdot v_o$. U slučaju narušenja ovih uslova, raspodela se stabilizuje dodavanjem 6-spinskih interakcionih članova u originalni hamiltonijan.

Druga vrsta nestabilnosti koja dolazi do izražaja u "constrained" fiksnim tačkama IC i AC je u vezi sa elastičnim anomalijama sistema ($C_{11}\to 0$). Pojava elastičnih anomalija je neposredna posledica uticaja spinskih fluktuacija na rešetku [11,44] i ne pojavljuje se u Heisenbergovoj fiksnoj tački u kojoj kuplovanje spinova sa rešetkom iščezava. Razvijanje elastičnih anomalija može da prekine "lanac" krosovera u nekoj od fiksnih tačaka IC ili AC, dovodeći do faznog prelaza prve vrste. Eksperimentalno bi se mogao ustanoviti ovaj efekat, merenjem kritičnih indeksa. Medjutim, u praksi, ta mogućnost jako zavisi od veličine oblasti oko tačke u kojoj se dešava krosover efekat. Proračun veličine te oblasti zahteva poznavanje jednačine stanja u blizini fiksne tačke višeg reda, što nije bila namera ovog rada. Jedna procena veličine te oblasti može se dati na osnovu poznavanja krosover eksponenata $\frac{y_1^C}{\lambda^C}$ i $\frac{y_2^A}{\lambda^A}$. Kako je $y_1^C/\lambda^C = \alpha^H$ malo, ovaj fenomen je teško konstatovati u izotropnoj "constrained" fiksnoj tački. Medjutim, šanse za eksperimentalnu proveru su nekoliko puta veće u anizotropnoj "constrained" fiksnoj tački.

Tabela 1.) Aproksimativne vrednosti integrala koji se pojavljuju u rekurentnim relacijama i linearizovanim rekurentnim relacijama, pri $r_i = 0$.

usvojena oznaka	vrednost
A(0)	$\hat{C}d \left\| (\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4})(1 - b^{-2}) \right\| + 0(\varepsilon^2)$
π(0,0)	$\hat{C}d\ell nb(1 + \frac{\varepsilon}{2}\ \ell nb) + o(\varepsilon^2)$
D(0,0,0)	$\frac{\hat{C}_4^{\ 2}}{2}\ \ell nb + o(b^{-2})$
B(0;0,0)	$\frac{\hat{C}_4^{\ 2}}{2}\ \ell nb(1 + \ell nb) + o(1)$

$$\hat{C}d = \left| 2^{d-1}\ \bar{u}^{d/2} \cdot \Gamma(d/2) \right|^{-1}$$

Tabela 2.) Kritični indeksi pri d = 3

a) kruti model

kritični indeks	analitički izraz dobijen pomoću RNG	n = 1	n = 2	n = 3
ν	$\frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+23n+60)}{8(n+8)^3}\varepsilon^2$	0.626	0.656	0.678
η	$\frac{n+2}{2(n+8)^2}\varepsilon^2$	0.018	0.02	0.021
γ	$1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\varepsilon + \frac{(n+2))n^2+22n+52)}{4(n+8)^3}\varepsilon^2$	1.244	1.3	1.256
α	$\frac{4-n}{2(n+8)}\varepsilon - \frac{(n+2)(n^2+30n+56)}{4(n+8)^3}\varepsilon^2$	0.077	0.22	-0.1
β	$\frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)}\varepsilon + \frac{2n^2+5n+2}{2(n+8)^3}\varepsilon^2$	0.339	0.36	0.376
δ	$3 + \varepsilon + \frac{n^2+14n+60}{2(n+8)^2}\varepsilon^2$	4.463	4.46	4.459

b) renormalizovani kritični indeksi

kritični indeks	analitički izraz dobijen pomoću RNG	n = 1	n = 2	n = 3
ν	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2(n+8)} \varepsilon - \frac{13n^2+34n-200}{8(n+8)^3} \varepsilon^2$	0.641	0.66	0.635
η	$\frac{n+2}{2(n+8)^2} \varepsilon^2$	0.018	0.02	0.021
γ	$1 + \frac{3\varepsilon}{n+8} - \frac{14n^2+44n-184}{4(n+8)^3} \varepsilon^2$	1.377	1.31	1.190
α	$\frac{n-4}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{16n^2+82n-8}{2(n+8)^3} \varepsilon^2$	-0.105	0.01	0.098
β	$\frac{1}{2} - \frac{n+2}{4(n+8)} \varepsilon \left(1 + \frac{18n+84}{2(n+8)^2} \varepsilon\right)$	0.364	0.34	0.321
δ	$3 + \varepsilon + \frac{n^2+14n+60}{2(n+8)^2} \varepsilon^2$	4.463	4.6	4.459

Tabela 3.) Fiksne tačke u prostoru parametara $(u, v, w; \hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ pri uslovu $\hat{u}\hat{v} = \hat{w}^2$.

Fiksne vrednosti parametara						NAZIV fiksne tačke
u^*	v^*	w^*	$\hat{u}^*$	$\hat{v}^*$	$\hat{w}^*$	
$u^*=v^*=w^* = u^{*H}(n)$			$\hat{u}^*=\hat{v}^*=\hat{w}^* = 0$			Heisenbergova
			$\hat{u}^*=\hat{v}^*=\hat{w}^* = \hat{u}^{*C}(n)$			izotropna "constrained"
			$\hat{u}^{*A}$	$\hat{v}^{*A}$	$\hat{w}^{*A}$	anizotropna "constrained"
$u^*=v^*=w^* = 0$			$\hat{u}^*=\hat{v}^*=\hat{w}^* = 0$			trivijalna
			$\hat{u}^*=\hat{v}^*=\hat{w}^* = \hat{u}^{*I}(n)$			Isingova
bikonična			?			
$u^{*H}(m)$	0	$w^*=0$	0	0 / $\hat{u}^{*I}(n-m)$	$\hat{w}^*=0$	dekuplovane
			$\hat{u}^{*C}(m)$	0		
0	$u^{*H}(n-m)$		0 / $\hat{u}^{*I}(m)$	0		
			0	$\hat{u}^{*C}(n-m)$		
$u^{*H}(m)$	$u^{*H}(n-m)$		fiksna linija 1)			
0	$v^*=w^*=\infty$		0 / $\hat{u}^{*I}(m)$	$\hat{v}^*=\hat{w}^*=\infty$		anizotropne
$u^{*H}(m)$			$\hat{u}^{*C}(m)$			

1) $m\hat{u}^* + (n-m)\hat{v}^* = \varepsilon - 2(m+2)u^{*H}(m)$

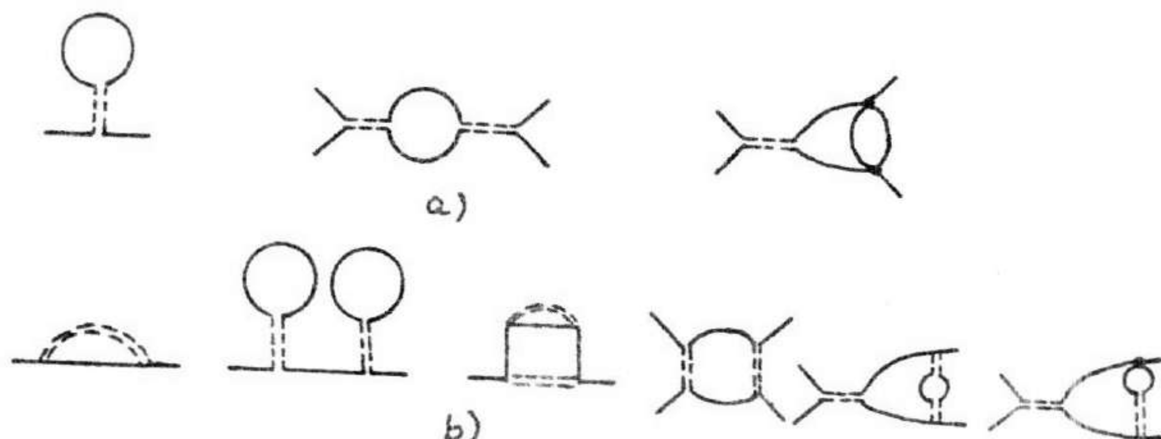
$$= \frac{4-m}{m+8}\,\varepsilon$$

Apendiks A-1)

TIPOVI DIJAGRAMA KOJI SADRŽE DUGODOMETNE INTERAKCIJE

Interakcione konstante dugodometnih perturbacija koje su indukovane kompresibilnošću u polaznom hamiltonijanu (4.3) su proporcionalne $1/\Omega$, gde je Ω - zapremina sistema. Posmatrajmo napr. perturbacioni član $\frac{\hat{u}}{\Omega}\left(\sum_{i}\int_{\vec{q}}\sigma_{\vec{q}}^{\,i}\,\sigma_{-\vec{q}}^{\,i}\right)^{2}$, koji smo predstavili simbolom $\succ\!=\!\prec$. Duploj isprekidanoj liniji odgovara samo impuls nula, zbog čega i nastaju specifičnosti u dijagramima, koji sadrže ovakve interakcione članove. Samo odredjeni tipovi ovih dijagrama daju nezanemarljive doprinose rekurentnim relacijama interakcionih parametara hamiltonijana (4.3), u termodinamičkom limesu [8].

Dijagrami prvog i drugog reda sa dve spinske linije (doprinosi dvospinskoj interakciji) i dijagrami drugog i trećeg reda sa četiri spinske linije (doprinosi interakcionom članu $\frac{\hat{u}}{\Omega}$ -) su prikazani na sl. A-1.)



sl. A-1.

Uporedimo doprinose prvog dijagrama sa sl. a) i prvog sa sl.b) dvospinskoj interakcionoj konstanti:

$$\text{a)}\quad \left(4n\,\frac{\hat{u}}{\Omega}\cdot\int_{p>\frac{\Lambda}{b}}\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{p^2+r}\right) \qquad \text{(A.1.1)}$$

$$\text{b)}\quad 4\,\frac{\hat{u}}{\Omega}\cdot\frac{1}{q^2+r}\,, \qquad \text{(A-1.2)}$$

gde je integracija po impulsu $\vec{p}$ propagatorske linije daje doprinos reda Ω, dok je $\vec{q}$ u slučaju pod b) impuls spinske linije, što je neposredna posledica zatvorene petlje isprekidane linije. Slično, svi dijagrami na sl. A-1.b) su funkcije impulsa spinskih linija i nedostaje im bar jedna integracija po propagatorskim linijama. Zbog toga su njihovi doprinosi reda $\frac{1}{\Omega}$ i zanemaruju se u termodinamičkom limesu.

Zbog toga što dupla isprekidana linija nosi impuls nula, dijagrami koji sadrže interakcioni član $\frac{\hat{u}}{\Omega}\,(\sum_i\int_q \sigma_q^{\,i}\,\sigma_{-q}^{\,i})^2$ ne smeju imati zatvorene petlje duple isprekidane linije, kao ni oslanjanje duple isprekidane linije na jednu spinsku i jednu propagatorsku liniju. Očigledno je da isti zaključak važi i za dijagrame koji sadrže perturbacione članove

$$\frac{\hat{v}}{\Omega}(\sum_j\int_{\vec{q}} s_{\vec{q}}^{\,j}s_{-\vec{q}}^{\,j})^2 \quad \text{i} \quad \frac{2\hat{w}}{\Omega}\sum_{i,j}(\int_{\vec{q}_1}\sigma_{\vec{q}_1}^{\,i}\sigma_{-\vec{q}_1}^{\,i})(\int_{\vec{q}_2}s_{\vec{q}_2}^{\,j}s_{-\vec{q}_2}^{\,j})\,.$$

Tri dozvoljena načina na koja dupla isprekidana linija učestvuje u dijagramima data su na sl. A-1.a)

Apendiks A-2)

POSTUPAK DIJAGONALIZACIJE MATRICA R, U i $\hat{U}$

Postupak kojim se lako mogu dijagonalizovati matrice R, U i $\hat{U}$ u fiksnim tačkama H, IC i AC, je neposredna posledica simetrije rekurentnih relacija (4.12-13), (4.17-19) i (4.20-22) u odnosu na zamenu

$$\begin{aligned} u &\to v \\ \hat{u} &\to \hat{v} \\ \text{i} \qquad m &\to n-m \,. \end{aligned} \qquad \text{(A-2.1)}$$

Pokazaćemo to na primeru dijagonalizacije matrice $\hat{U}$ u IC fiksnoj tački. Ova matrica je data izrazom (4.74), u kome za $\hat{u}^{*C}$ i u^{*H} treba staviti vrednosti koje odredjuju lokaciju IC fiksne tačke - formule (4.71-72). Jednačina koju treba rešiti, ako zadržimo samo članove reda ε, je

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - 2m\frac{4-n}{n(n+8)}\varepsilon - \frac{2(m+2)\varepsilon}{n+8} - \hat{\lambda} & 0 & -2(n-m)\left(\frac{\varepsilon}{n+8} + \frac{4-n}{n(n+8)}\varepsilon\right) \\ 0 & \varepsilon - \frac{2(n-m)(4-n)}{n(n+8)}\varepsilon - 2\frac{(n-m+2)\varepsilon}{n+8} - \hat{\lambda} & -2m\left(\frac{\varepsilon}{n+8} + \frac{4-n}{n(n+8)}\varepsilon\right) \\ -m\left(\frac{\varepsilon}{n+8} + \frac{4-n}{n(n+8)}\varepsilon\right) & -(n-m)\left(\frac{\varepsilon}{n+8} + \frac{4-n}{n(n+8)}\varepsilon\right) & \varepsilon - \frac{n+4}{n+8}\varepsilon - \frac{4-n}{n+8}\varepsilon - \hat{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A-2.2)}$$

Ako u (A-2.2) prvu i drugu kolonu dodamo trećoj, dobićemo na svakom mestu isti izraz: $\frac{n-4}{n+8}\,\varepsilon - \hat{\lambda}$. Razvojem dobijene determinante po trećoj koloni lako nalazimo:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n-4}{n+8}\,\varepsilon + o(\varepsilon^2) \qquad \text{(A-2.3)}$$

a druge dve svojstvene vrednosti rešavanjem odgovarajuće kvadratne jednačine. Svojstvenoj vrednosti (A-2.3) odgovara svojstveni vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Preostale dve svojstvene vrednosti su

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{n+4}{n+8}\,\varepsilon + o(\varepsilon^2) \qquad \text{(A-2.4)}$$

i

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{n}{n+8}\,\varepsilon + o(\varepsilon^2) \qquad \text{(A-2.5)}$$

sa svojstvenim vektorima $\begin{pmatrix}(n-m)^2\\m^2\\-m(n-m)\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2(n-m)\\-2m\\n-2m\end{pmatrix}$, respektivno.

Korekcije reda ε^2 dobijamo delujući polaznom matricom $\hat{U}^C$ na odgovarajući svojstveni vektor. Lako je proveriti da su koeficijenti uz ε^2 upravo vrednosti koje smo naveli u izrazima (4.75-77).

L I T E R A T U R A

1. K.G.Wilson and J.Kogut: Phys.Rep. 12 C, 75 (1974).
   K.G.Wilson: Rev.Mod.Phys. 47, 779 (1975).
2. M.E.Fisher: Rev.Mod.Phys. 46, 597 (1974).
3. K.G.Wilson and M.E.Fisher: Phys.Rev.Lett., 28, 240 (1972)
   S.-k Ma: Rev.Mod.Phys. 45, 589 (1973)
4. A.Aharony: in Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 6, C.Domb and M.S. Green, Editors, Academic Press, N.Y. (1976)
5. F.J.Wegner: Lecture Notes in Physics, vol. 37, 171-196, Berlin-Heidelberg - N.Y.: Springer, (1975)
6. G.Toulouse and P.Pfeuty: Introduction en Groupe de Renormalisation et a ses Applications, Presses Universitaires de Grenobles, (1975)
7. A.J.Larkin and S.A.Pikin: Zh.Eksp.Teor.Fiz. 56, 1664 (1969) [Sov.Phys.-JETP 29, 891 (1969)]
8. J.Sak: Phys.Rev. B 10, 3957 (1974)
9. G.A.Baker and J.W.Essam: Phys.Rev. Lett. 24, 477 (1970)
10. Y.Imry: Phys.Rev.Lett. 33, 1304 (1974)
11. D.J.Bergman and B.I.Halperin: Phys.Rev. B 13, 2145 (1976)
12. J.Rudnick, D.J.Bergman and Y.Imry: Phys.Lett. 46A, 449 (1974)
13. M.E.Fisher: Phys.Rev. 176, 257 (1968)
14. S.Milošević, N.Švrakić and B.Tadić: Lett.al Nuovo Cim., 14, 421 (1975)
15. K.A.Penson: Phys.Rev. B 8, 2119 (1973);
    B.K.Chakrabarti: Phys.Lett. 57A, 15 (1976)

16. M.A. de Moura, T.C.Lubensky, Y.Imry and A.Aharony: Phys.Rev. B 13, 2176 (1976)

17. G.Bender: Z.Physik B 23, 285 (1976)

18. K.K.Murata: Phys.Rev. B 15, 4328 (1977)

19. T.Nattermann: preprint

20. J.M.Kosterlitz: J.Phys. C 9, 497 (1976)

21. P.M.Levy: Phys.Rev. 177, 509 (1969)

22. F.Kefer: Handbuch der Physik, vol. 18, 1

23. P.M.Levy: in Magnetic Oxides, D.J.Kraik,editor, Wiley, London (1975), ch. 4

24. R.M.White: Quantum theory of magnetism, McGraw-Hill (1970)

25. K.G.Wilson: Phys.Rev. B 4, 3174, 3184 (1971)

26. L.Gunter, D.J.Bergman and Y.Imry: Phys.Rev.Lett., 27, 558 (1971)

27. S.K. Ma: Modern Theory of Critical Phenomena, Benjamin Inc., Advanced Book Program Reading, Massachusetts, (1976)

28. R.Abe: Progr.Theor.Phys. (Kyoto) 48, 1414 (1972); 49, 113, 1877, (1973)

29. F.J.Wegner: Phys.Rev. B 6, 1891 (1972)

30. N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov: Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience Publ., London (1959)

31. C.Di Castro and G. Jona-Lasinio: Phys.Lett. 29A, 322 (1969); C.Di Castro: Lett.Nuovo Cim. 5, 69 (1972)

32. E.Brézin, J.C.Le Guillou and J.Zinn-Justin: Phys.Rev. D 9, 1121 (1974)

33. F.J.Wegner: J.Phys. C 7, 2098 (1974)

34. K.G.Wilson: Phys.Rev.Lett. 28, 548 (1972)

35. A.D.Bruce, M.Droz and A.Aharony: J.Phys. C 7, 3673 (1974)

36. E.Riedel and F.J.Wegner: Z.Physik 225, 195 (1969)

37. M.E.Fisher and P.Pfeuty: Phys. Rev. B 6, 1889 (1972)

38. A.Aharony and A.D.Bruce: Phys.Rev.Lett. 33, 427 (1974)

39. G.F.Tuthil, J.F.Nicoll and H.E.Stanley: Phys.Rev. B 11, 4579 (1975)

40. E.Brézin, J.C.Le Guillou and J.Zinn-Justin: Phys.Rev. B 10, 892 (1974)

41. B.Nienhuis and M.Nauenberg: Phys.Rev. B 13, 2021 (1976)

42. J.M.Kosterlitz, D.R.Nelson and M.E.Fisher: Phys.Rev. B 13, 412 (1976)

43. V.A.Alessandrini, H.J.de Vega and F.Schaposnik: Phys.Rev. B 10, 3906 (1974)

44. S.Milošević, L.Sasvári and B.Tadić: preprint

45. D.Mukamel and S.Krinsky: Phys.Rev. B 13, 5065, 5078, 5086 (1976)